第九章 误差分析

物理实验中的测量结果本质上蕴含一定的随机性,带有一定的误差. 高能物理实验中,物理规律本身还具有统计性.按照量子力学原理, 对处于同一个态的微观粒子,测量同一个可观测的物理量时,即使不存在任何测量误差,各次测量的结果也不相同,除非粒子处于这个可观测量的本征态. 简言之,实验观测量是随机量.为了能够通过对于随机量的处理,既恰当地得出合理的结论,又确切地知道结论的可靠程度,务须应用有关随机量的数学——概率论、数理统计和随机过程论等定量研究随机现象规律的科学.

本章将在概率统计学[1] 的基础上,概括介绍误差分析的概念和方法,以及有关结论和实用公式[2]. 之后,结合本论文的具体工作给出各种实测量的系统误差.

9.1 基本概念和一般规则

9.1.1 有关误差的概念

在数据分析过程中,人们习惯于作理想化的假设,认为实验测量到的量值是精确可靠的;在误差分析过程中,人们又乐于作不可知论的假设,认为一定条件下被测量的客观存在的量值(即真实值或称真值)是可望不可及的,即只有在不可能做到的无穷多次测量中才可能得到事物的真值(记作μ).若记第i次测量值为x_i,测量次数为n,则

$$\mu \equiv \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right) \tag{9.1}$$

实际工作中,常用多次(n次)测量值的平均值(记作$\bar{x}$)作为真值的近似,即满足于获得$\bar{x}$:

$$\bar{x} \equiv \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n} \tag{9.2}$$

[1]有关概率统计的知识,参见文献[43][44][45].

[2]有关概率统计知识在粒子物理和实验物理中的应用, 参见文献[46][47][48].

一般认为n值越大,近似程度越好.为了确切地了解测量值对于真值的近似程度,引入了误差概念.关于误差的表示有多种,主要分为两类;一类称之为绝对误差,即测量值与真实值之差,可表示为

(绝对)测量误差= 测量值−真实值

另一类称之为相对误差,即测量误差与真实值之比.

由于真实值无法得到,可以根据理论和实际的需要,用测量应得到的数值,即应得值(或称目的值)来代替被测量的真实值进行绝对误差的计算.所用应得值之不同,得到的绝对误差也就有不同的名称.常见的绝对误差有多种,择要而列:

1. **真误差(δ)** 把被测量真实值作为应得值所获得的测得值与真实值之差称为真误差,简称真差,记作δ:

$$\delta = x - \mu \tag{9.3}$$

因真实值不可得,故真误差的概念常在理论推导之中应用.

2. **剩余误差(ν)** 把有限次(n次)测量所得到的测得值的算术平均值作为应得值,据此求出的绝对误差称为剩余误差,简称残差.若第i次测得值的残差记为ν_i,则:

$$\nu_i = x_i - \bar{x} \tag{9.4}$$

式中x_i为第i次测量得到的测得值,$\bar{x}$为n次测得值的算术平均值.因剩余误差ν_i可以用测得值算出,故在误差计算中经常使用.

3. **标准误差(σ)** 对一固定量进行无穷多次测量,各次测量真差平方的算术平均值再开方,所得到的数值称为标准误差,又称为<u>标准偏差</u>,记作σ:

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2} \tag{9.5}$$

根据σ的数学运算关系,又称其为<u>均方根误差</u>.

相应于不同的绝对误差,有不同的相对误差,在此不再赘述[3]. 此外,还有一个称之为不确定度的概念[50].

对于大小已知的误差,其方向指标有两种情况. 一种情况是明确取“+”号和“−”号所表示的数值.这种明确方向的表示方法与误差一词的含义一致. 另一种是采

[3]有关绝对误差和相对误差的详细论述,参见文献[49].

用"±"号所表示的数值,其方向是不明确的,所给出的是一个数值区间,即误差的大小变化范围,或者说给出了一个以"±"号前的数值(即实测值)为中心,以"±"号后的数值为区间范围,而实际值(或被测量的真值)应在此范围内.过去也把表示区间范围的数值叫误差,实际上它并不是误差的具体值.为了明晰起见,国际上采用了不确定度的概念,即凡是用区间(±号)给出的误差皆称之为不确定度.

本章在概念上并不作如上的细致区分,笼统处之,把关于测量值可靠性的研究称为误差分析,把标志测量值可靠程度的数值称为误差.

9.1.2 误差的描述

随机变量的误差常用正态分布描述.设对某一固定量(真值)作等精度n次测量,得到一组测量值$x_1, x_2, \cdots, x_n$,则测得值的概率密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}] \tag{9.6}$$

式中μ和σ为两个参数.此分布称为正态分布或高斯分布,在误差理论中称为随机误差的分布定律.

随机变量的概率密度函数完整地反映了随机变量的统计规律.但在实际问题中,重要而实用的往往是随机变量的某些统计特性,以及刻划这些特性的数字特征.最常用的数字特征有二:期望和方差.

概率密度函数为$f(x)$的随机变量,其数学期望值定义为

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{9.7}$$

方差定义为

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2 f(x) dx \tag{9.8}$$

其平方根(取正值)称为均方根差.正态分布的期望和方差分别为

$$E(x) = \mu (= \bar{x}) \quad 与 \quad D(x) = \sigma^2. \tag{9.9}$$

参数μ从数学上看是数学期望值,从物理上讲是测量平均值[4](亦称均值). 它决定了正态分布的位置,分布对于此值对称,且在该值达到极大

$$f(x=\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \tag{9.10}$$

参数σ决定了分布的形状,形象地说决定了曲线的尖锐程度.σ 越小曲线越尖锐,σ越大则图形越平缓.参看图 9.1.在物理上, σ用作标准偏差的估值[4] .

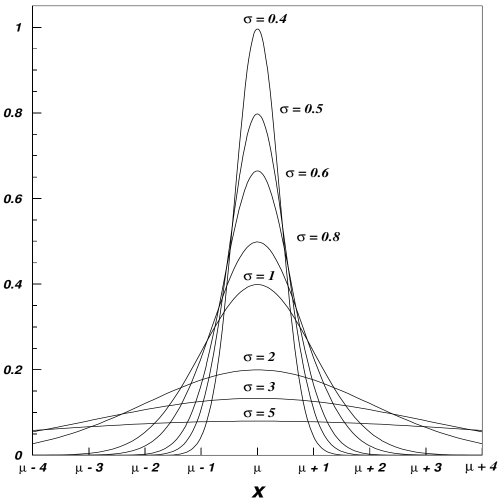

图 9.1 : 高斯分布

无论从数学还是从物理上讲,描述随机变量的正态分布可以完全由μ和σ两个参数确定.故正态分布常记为$N(\mu,\sigma^2)$或$N(\mu,\sigma)$.实际上特征参数之重要具有普遍性,其意义在于知道了它们就能确定概率密度函数,而知道了概率密度函数便可求出分布函数,即随机变量的概率分布.设随机变量的概率密度函数为$f(x)$,则其分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx \tag{9.11}$$

而取值x落在任意区间$[x_1,x_2]$内的概率为

$$F(x_1\le x\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=F(x_2)-F(x_1) \tag{9.12}$$

[4]参数μ和σ的物理意义从离散变量的角度看更清晰.设随机变量x_i的概率密度为p_i,则期望和方差定义为

$$E(x)=\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}x_ip_i),\ D(x)=\lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(x)]^2p_i)$$

对于等精度的测量,取经典概率$p_i=1/n$,则

$$E(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right),\qquad \text{即} \qquad E(x)=\mu$$

由式(9.1)知上式即真值的定义,n有限时,即是均值.而方差

$$D(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(x)]^2\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[x_i-E(x)]^2\right)$$

由式(9.5)知方差即标准偏差的平方.

在物理学实验中,所测物理量的真实值落在一定数值范围之内的几率(用百分数表示)称为所给数值范围的置信水平(confidence level).这个量是实验结果可靠程度的一种定量标志.由于正态分布的标准偏差σ用来表示测量的误差.正态变量(即物理上的所测量)落在$\mu \pm n\sigma$ 区域内的概率便有了实际的重要性,特别是

$$F(\mu - \sigma < x \leq \mu + \sigma) \simeq 68.3\% \tag{9.13}$$

$$F(\mu - 2\sigma < x \leq \mu + 2\sigma) \simeq 95.5\% \tag{9.14}$$

$$F(\mu - 3\sigma < x \leq \mu + 3\sigma) \simeq 99.7\% \tag{9.15}$$

可见,随机变量落在$\mu \pm 3\sigma$区域内的概率几乎达百分之百.这表明如果被测的实验量服从正态分布,则几乎可以肯定,它的真值落在$\mu \pm 3\sigma$区域之内,此即实验物理中普遍使用的3σ规则 .

对于服从正态分布$N(\mu, \sigma)$的观测值x, 明确表达出测量结果的概率意义的完整报道应是

$$\mu = x \pm \sigma \qquad (\text{ 置信水平 } 68.3\%) \tag{9.16}$$

即x落入区间$[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ 内的概率为68.3%. 在不太严格的情况下,置信水平常常忽略.

对一般的正态分布作变量代换 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$,得到所谓的标准正态分布, 记为$N(0,1)$;其期望值为0,方差为1,概率密度函数为

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \tag{9.17}$$

这一分布在实际工作种经常用到.

9.1.3 误差的传递

在误差传递理论中,能够由直接测量得到的被测量定义为直接观测量; 只能通过若干直接观测量按照一定的函数关系计算得到的被测量定义为间接观测量.直接观测量中存在的误差必然会传递到间接观测量中去,这称之为间接观测量误差的传递.误差传递又称为误差传播.

间接观测量z与若干直接观测量$x_1, x_2, \cdots, x_m$之间存在的函数关系设为F,即

$$z = F(x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{9.18}$$

不失一般性地假设各x_i的测量误差服从正态分布,相应的标准偏差记为σ_i.需要研究的问题是如何由x_i的误差求出z的误差.下面着重讨论三种情况:一种是各个观测量相互独立,但是直接与间接观测量之间的函数关系未知;另一种情况是函数关系已知,但各个观测量之间彼此相关;还有一种情况是关于不等精度测量时误差的传递.

函数关系未知的误差传递

首先考虑函数关系已知时独立变量的误差传递.设间接观测量z的误差为σ_z,则有

$$\sigma_z = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x_1})^2\sigma_1^2 + (\frac{\partial F}{\partial x_2})^2\sigma_2^2 + \cdots (\frac{\partial F}{\partial x_m})^2\sigma_m^2} \tag{9.19}$$

上式称为误差传递定律,亦称误差累积定律.

令间接观测量的部分误差$D_j = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x_j})^2\sigma_j^2}$,则式(9.19)又可改记为

$$\sigma_z = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_m^2} \tag{9.20}$$

若函数关系未知,那么间接观测量的误差可由实验方法求得.施行此法的条件有二:

1. 间接观测量所涉及的各直接观测量彼此之间相互独立,任意一个直接观测量的变化不会引起其他直接观测量的变化.

2. 可以用实验的办法测得各直接观测量轮流变化时,间接观测量的变化.

由式(9.19)可知,因F未知,故各$(\frac{\partial F}{\partial x_k})^2$无法得知.但根据条件(2)可以求出各$\sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x_k})^2\sigma_k^2}$的整体效果.具体地说,实验时只变动$\sigma_k$,而其他各$\sigma_j (j \neq k)$ 不变,即$\sigma_j = 0$,此时的间接观测量的变化量即为部分误差D_k

$$D_k = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial x_1})^2\sigma_1^2(=0) + \cdots + (\frac{\partial F}{\partial x_k})^2\sigma_k^2(\neq 0) + \cdots + (\frac{\partial F}{\partial x_m})^2\sigma_m^2(=0)} \tag{9.21}$$

依次类推,逐一求出各个D_k,之后利用式(9.20)求出间接观测量的误差σ_z.

此种方法颇具实用价值,在计算有关事例选择的系统误差时,即采用此法.判选事例常常用到若干条件,这些条件或涉及事例的几何性质,或物理性质,或涉及不同的子探测器,各条件之间可以合理地认为是彼此独立的.利用判选程序很容易变化某一条件,同时保持其他条件不变.如此轮流求出诸条件各自对于误差的贡献(即各个部分误差),最后由式(9.20)求出总的系统误差.

变量相互关联的误差传递

与独立变量相比,相关变量的误差传递较为复杂.下面先以两个变量为主加以讨论,然后推而广之.描述相关变量的数字特征除期望和方差外,还需要引入刻划相互联系的数字特征——协方差,其定义为:

$$Cov(x,y) = E([x-E(x)]\cdot[y-E(y)]) \tag{9.22}$$

性质有[5]:

- $Cov(x,y) = Cov(y,x)$;
- $Cov(a_1x+b_1, a_2y+b_2) = a_1a_2Cov(x,y)$, a_1, b_1, a_2, b_2为常数;
- $Cov(x_1+x_2, y) = Cov(x_1,y) + Cov(x_2,y)$;
- $|Cov(x,y)|^2 \le D(x)\cdot D(y)$;
- 若x,y相互独立,则$Cov(x,y)=0$.

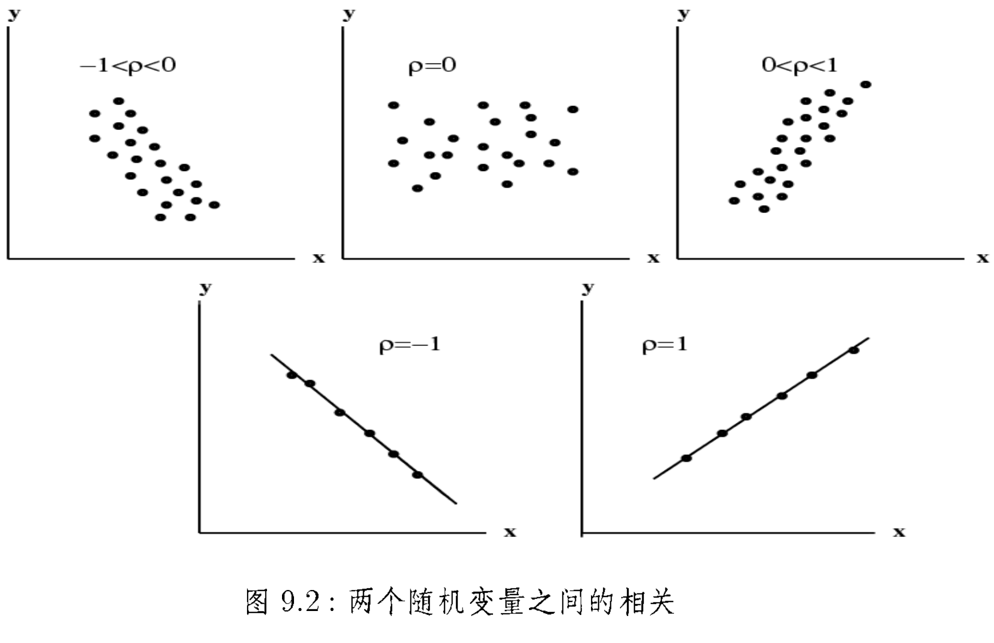

图 9.2 : 两个随机变量之间的相关

实际分析过程中还常常用到另一个特征量——相关系数,定义为:

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{D(x)}\cdot\sqrt{D(y)}} \qquad (\text{如果 } D(x)\neq 0, D(y)\neq 0) \tag{9.23}$$

[5]关于诸性质的证明m,参见文献[43]第2章.

当x, y服从正态分布时，即$x \sim N(\mu_x, \sigma_x), y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$,上式成为

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} \text{ 或 } Cov(x,y) = \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \tag{9.24}$$

关于ρ_{xy}的取值与x, y之间的相关性质的形象描述，可以参看图 9.2.

设x, y为相互关联的直接观测量,依赖它们的间接观测量为z,相关函数为F, 即

$$z = F(x,y) \qquad (Cov(x,y) \neq 0) \tag{9.25}$$

此时的误差传递公式为

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= (\frac{\partial F}{\partial x})^2\sigma_x^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2\sigma_y^2 + 2\cdot(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y})\cdot Cov(x,y) \quad (9.26)\\ &= (\frac{\partial F}{\partial x})^2\sigma_x^2 + (\frac{\partial F}{\partial y})^2\sigma_y^2 + 2\cdot(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y})\cdot \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \quad (9.27)\end{aligned}$$

对于函数关系为加减乘除的情况,具体的计算公式如下

1. 加减♠ $z = ax \pm by$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\cdot Cov(x,y) \quad (9.28)\\ &= a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\cdot \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y \quad (9.29)\end{aligned}$$

2. 乘除♠ $z = \pm axy$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z^2}{z^2} &= \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} + 2\cdot\frac{Cov(x,y)}{xy} \quad (9.30)\\ &= \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} + 2\cdot\frac{\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y}{xy} \quad (9.31)\end{aligned}$$

♠ $z = \pm a\,\frac{x}{y}$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_z^2}{z^2} &= \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} - 2\frac{Cov(x,y)}{xy} \quad (9.32)\\ &= \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} - 2\frac{\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y}{xy} \quad (9.33)\end{aligned}$$

从形式上看,对于加减量以求绝对误差为易,对于乘除量以求相对误差为宜.

下面把两个相关变量推广到多个相关变量.设观测矢量为$\vec{x}$,期望值矢量为$\vec{\mu}$,即有

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \tag{9.34}$$

引入协方差矩阵$\vec{V}$描写变量之间的相关性

$$\vec{V} = (\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \tag{9.35}$$

式中$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, 注意到$\rho_{ii} = 1$,则有$\sigma_{ii} = \sigma_i^2$.

引入求导矢量$\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}\right)^T = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$,$T$表示转置. 于是误差传递公式[6] 可以写为

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}\right)^T_{\vec{x}=\vec{\mu}} \cdot \vec{V} \cdot \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}\right)_{\vec{x}=\vec{\mu}} \tag{9.36}$$

$$= \sum_{ij}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{x_i=\mu_i} \cdot V_{ij} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_j=\mu_j} \tag{9.37}$$

$$= \sum_{i}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2_{x_i=\mu_i} \cdot \sigma_i^2 + 2\sum_{i\le j=2}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_{x_{i,j}=\mu_{i,j}} \cdot \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{9.38}$$

不等精度观测量的误差处理

不等精度测量就是对同一个量进行两种或多种不同的观测,得到了精确程度和可靠程度不同的测量结果.换句话说,即经由不同的人员,采用不同的方法,应用不同的仪器,处于不同的条件,对同一个量进行观测得到的测量结果.

在处理不等精度的测量数据的时候,为了权衡各种数据的质量优劣,区别彼此间的相对重要程度,引进标志精度的特征指标**权重**(weight),记作w. 精度高的测量数据的误差小,可靠性高,在数据处理过程中占的地位重要,其权重自然就大:反之,权重就小.

设有n个不等精度的间接测量结果为$z_1, z_2, \cdots, z_n$, 相应的误差为$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, 确定出相应的权重为$w_1, w_2, \cdots, w_n$,则加权算术平均值为

$$\bar{z}_w = \frac{w_1 z_1 + w_2 z_2 + \cdots w_n z_n}{w_1 + w_2 + \cdots w_n} \tag{9.39}$$

$$= \frac{w_1}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} z_1 + \frac{w_2}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} z_2 + \cdots + \frac{w_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} z_n \tag{9.40}$$

[6]有关公式的证明及进一步的推广,参见[46]第5章第9节.

此式可视为具有加减关系的间接观测量的具体函数关系,根据式(9.19) 得到$\bar{z}_w$的误差计算公式:

$$\sigma_{\bar{z}_w} = \sqrt{\Big(\frac{w_1}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}\Big)^2 \sigma_{z_1}^2 + \Big(\frac{w_2}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}\Big)^2 \sigma_{z_2}^2 + \cdots + \Big(\frac{w_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i}\Big)^2 \sigma_{z_n}^2} = \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_{z_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} w_i} \qquad (9.41)$$

粒子物理中,对不同的实验组的测量值需要进行加权平均,权重取为测量误差平方的倒数.以服从正态分布的被测量为例,测量误差取为标准偏差,则有

$$w_i = \frac{1}{\sigma_{z_i}^2} \qquad (9.42)$$

代入式子(9.40)和(9.41),则分别给出

$$\bar{z}_w = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{\sigma_{z_i}^2}\right) \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{z_i}^2}\right) \qquad (9.43)$$

与

$$\sigma_{\bar{z}_w} = 1 \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{z_i}^2}} \quad \text{或} \quad \frac{1}{\sigma_{\bar{z}_w}^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{z_i}^2} \qquad (9.44)$$

9.1.4 统计误差的计算

如前述及,在涉及微观粒子的测量中,除去通常测量中碰到的系统误差、偶然误差和过失误差,在随机事件测量过程中还存在一种独特的起伏现象,即重复测量的值并不相同, 与测量仪器、环境状态以及观测人员的主观素质等都无关,是测量中能达到的最高精确度, 此种误差称之为统计误差.

统计误差是微观世界几率性规律的反映.例如,高能基本粒子在相互作用过程中产生各种不稳定粒子,由各个事例测出的同一种不稳定粒子的质量是不确定的,而是围绕某一平均值有一定的涨落,是在某个质量范围内的一个分布.因此仪器测量到的数值有起伏,造成误差. 这种误差不是测量引进来的,而是微观事件本身具有的.

为了具体考察的方便,先假定在某时间间隔内具有特定特征(比如有特定的不变质量)的粒子有N个,且全部入射到探测器上,探测器对入射粒子的探测效率为ϵ, 即每个入射粒子引起探测器计数的概率为ϵ,未引起计数的概率为$(1-\epsilon)$, 这相当于一个伯努利试验.这N个入射粒子引起的计数为n, n也是一个随机变量,它服从的分布为

$$p(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!} \epsilon^n (1-\epsilon)^{N-n} \qquad (9.45)$$

以上n所服从的分布,形式上与二项式分布相同,但是入射粒子数N本身具有一定的分布,不是一个常数,而是一个随机变数.假定N服从泊松分布

$$p(N)=\frac{M^N}{N!}e^{-M} \tag{9.46}$$

其中M是入射粒子数N的期望值.

进一步考察(9.45)式,被探测粒子数n服从二项式分布的条件是N为一确定值,在有N个粒子入射的条件下,被探测粒子数的条件概率服从二项式分布, 将(9.45)式改记为

$$p(n/N)=\frac{N!}{(N-n)!n!}\epsilon^n(1-\epsilon)^{N-n} \tag{9.47}$$

等式左边表示在N确定的条件下n出现的概率.

现在入射粒子数N也是一个随机量,根据全概率公式,可以得到n的概率密度分布

$$\begin{aligned}p(n) &= \sum_{N=n}^{\infty}p(n/N)p(N)=\sum_{N=n}^{\infty}\frac{N!}{(N-n)!n!}\epsilon^n(1-\epsilon)^{N-n}\cdot\frac{M^N}{N!}e^{-M}\\ &= \frac{(M\epsilon)^n}{n!}e^{-M}\sum_{N=n}^{\infty}\frac{(1-\epsilon)^{N-n}M^{N-n}}{(N-n)!}\end{aligned}$$

令$i=N-n$,则有

$$p(n)=\frac{(M\epsilon)^n}{n!}e^{-M}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(1-\epsilon)^iM^i}{i!}=\frac{(M\epsilon)^n}{n!}e^{-M}e^{(1-\epsilon)M}$$

即有

$$p(n)=\frac{(M\epsilon)^n}{n!}e^{-(M\epsilon)} \tag{9.48}$$

从上式可以看到,当入射到探测器上的粒子数N服从平均值为M的泊松分布时, 引起的探测器的计数n服从平均值为$(M\epsilon)$的泊松分布.也就是说, 探测到的事例数与产生的事例数服从同样的分布.换言之,实验保持客观规律的原始分布或说固有特征不变.这是物理分析的实验基础.

当n较大时,上述泊松分布式(9.48)可以化为高斯分布[7]:

$$p(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(M\epsilon)}exp\{-\frac{[n-(M\epsilon)]^2}{2(M\epsilon)}\} \tag{9.49}$$

[7] n较大时,二项式分布可以化为泊松分布,泊松分布可以化为高斯分,有关推导参见文献[51]第4章129页和132页.

与高斯分布的标准形式(9.6)式比较,可知有

$$\mu = (M\epsilon) \quad 和 \quad \sigma^2 = (M\epsilon) \tag{9.50}$$

即此时计数n的期望值与方差相等,均为$(M\epsilon)$.

9.1.5 误差的分类

有关误差的分类列如下表,以备参阅[8]:

- **误差**
  - 系统误差
    - 按变化与否分
      - 恒定系统误差
        - 恒正系统误差
        - 恒负系统误差
      - 可变系统误差
        - 线性系统误差
        - 周期性系统误差
        - 复杂规律性系统误差
    - 按掌握程度分
      - 已定误差
      - 未定误差
  - 随机误差
    - 前次随机误差
    - 本次随机误差
  - 粗大误差
- **不确定度**
  - A类分量(统计方法分量)
  - B类分量(其他方法分量)

根据误差所具有的性质和特点,可以把测量误差分为三大类,分述如下.

♡ 系统误差

定义:在偏离规定的测量条件下多次测量同一量时,误差的绝对值和符号恒定; 或在该测量条件改变时,按照某一确定的规律变化的误差.

所谓确定的规律意思是,这种误差可以归结为一个因素或几个因素的函数,这种函数一般可以用解析公式、曲线或数表来表达.由于变化规律的不同,系统误差可以分为恒定系统误差和可变系统误差;更细致地,可变系统误差又可以分为线性系统误差、周期性系统误差和复杂规律性系统误差等等.

在谱仪取数过程中,温度湿度等因素随春夏秋冬四季呈规律性变化,就是一种周期性系统误差.在线刻度已对此进行了一定程度的修正.此外,探测器囿于精度所限,譬如能量分辨时间分辨的存在,自然会使系统具有一定误差.还有蒙特卡罗模拟与实验本身

[8]有关误差分类中词条的确切含义及详细解释,参看文献[51]第1章.

的不完全一致,亦可带来系统误差.这些因素都需要结合具体分析过程仔细考察.

♡ 随机误差

定义:在实际测量条件下,多次测量同一量时,误差的绝对值和符号的变化,时大时小,时正时负,以不可预测的方式变化的误差.随机误差又称偶然误差.

高能物理实验涉及的电子器件成千上万,取数的运行时间成年累月,秋毫鸿毛之类的干扰因素不胜枚举.这些细微嘈杂的变化无法预先确定,也无法事后修正,仅仅只能大略估计而已.经验表明随机误差是具有统计规律的误差.

♡ 粗大误差

定义:超出在规定条件下预期的误差.粗大误差又称过失误差.

含有粗大误差的测量值将明显歪曲客观现象,正确的测量结果不应包含粗大误差,即所有由于粗大误差引起的异常值应一律剔除不要.在事例判选时,因选择条件的不甚合理会引起异常误差的出现,此即粗大误差的一种.去除的办法是修改判选条件.

上述各类误差是一般实验测量中涉及到的.在高能物理实验中还要考虑统计误差[9].根据(9.50)式,如果产生事例数的期望值为N,那么其误差(以标准偏差表示)和相对误差分别为:

$$\sigma = \sqrt{N}, \qquad \text{和} \qquad \nu_\sigma = \frac{\sigma}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{9.51}$$

可见随着N的增大,误差σ增大,而相对误差ν_σ减小,也就是测量精度提高了.这就是增大样本提高精度的根据所在[10].

此外对于扫描数据的拟合来说,还有拟合误差.这种误差本质上是一种未知函数关系的间接观测量的误差.它由各种事例判选条件的误差引起.由于拟合对所有点进行,每点的误差变动独立而随机,对最终结果的影响难以解析预知;可以采用随机抽样的办法,通过实验确定.详见扫描结数据拟合一章.

9.2 系统误差分析

造成系统误差的原因很多,实际实验实行过程中,已经有所修正.这里所谓系统误差仅指在数据分析过程中由于蒙特卡罗模拟的偏差带来的误差.接收度的计算表明,分析过程中事例的损失是通过蒙特卡罗模拟得以补偿的.具体地说,数据分析最终确定的观

[9]对于某一测量来说,有时将误差的报道一分为二,记为

$$\mu_A(\text{ 期望值 }) = A(\text{测量值}) \pm \sigma_{stat}(\text{统计误差}) \pm \sigma_{syst}(\text{系统误差})$$

[10]随机误差和系统误差都具有统计规律,一般认为服从正态分.不同之处在于统计误差与计数(或测量值的数值)本身相关联,表现在其方差与期望值相等,确定较为简便;而随机误差则无此性质.

测事例数N_{obs}是由判选事例数N_{sel}经效率修正(或说效率补偿)得到的, 即

$$N_{obs} = \frac{N_{sel}}{\epsilon_{m.c.}} \tag{9.52}$$

在理想情况下,实验绝对精确,模拟彻底完美;观测事例数N_{obs}保持恒定; 或说判选事例数N_{sel}与修正效率$\epsilon_{m.c.}$的变化比例毫厘不爽. 此时无系统误差存在.但是,现实情况并不理想,模拟过程与真实过程或多或少存在差异,有时差异还会相当显著.这自然会影响到观测事例数的确定.根据误差传递定律(即利用(9.32)式),可知N_{obs}的误差与N_{sel}和$\epsilon_{m.c.}$ 两项误差的关系为

$$\zeta^2_{N_{obs}} = \zeta^2_{N_{sel}} + \zeta^2_{\epsilon_{m.c.}} - 2 \cdot \frac{Cov(N_{sel}, \epsilon_{m.c.})}{N_{sel} \cdot \epsilon_{m.c.}} \tag{9.53}$$

上式已记某一变量X的相对误差为ζ_X,即

$$\zeta_X = \frac{\delta X}{X} \tag{9.54}$$

在实际分析中,常将系统误差分为两类:一类是实验数据与模拟数据之差异造成的误差,称为判选误差;另一类是模拟模型不同引起的误差,称为模拟误差.对第一类误差而言,当判选条件变化时,N_{sel}与$\epsilon_{m.c.}$的变化相左,由此引起N_{obs}的不稳定,这种不稳定性的强弱即反映了判选误差的大小.此时N_{sel}与$\epsilon_{m.c.}$两者的变化如影随行,异常密切;彼此的误差高度相关.

另一类误差却与事例判选无关,即使判选条件不变,也会导致不同的效率.限于对物质间相互作用的掌握程度,目前尚无完善统一的理论可作依据.关于同一过程常有几种经验模型,采用不同的模型,编制的产生子不同,模拟效果不同,最终的修正效率自然存在差异.在无法判定不同模型孰优孰劣的情况下,只能将因模拟效果不同带来的效率差异视为误差予以考虑.另外,同一产生子常含若干可调参数, 以便通过调节达到与实验更加吻合的目的.不同参数的选取也会带来一定的误差. 在扫描研究中,常用的可调参数有发生反应时的质心系能量E_{cm},模拟时产生的事例数$N_{produce}$,粒子允许的运动空间范围(常用$\cos\theta$表征)等等. 此时$\epsilon_{m.c.}$的变化与N_{sel}毫无瓜葛;两者的误差亦无纠缠.

基于上述情况,相应于两类误差,亦将效率分为两项:

$$\epsilon_{m.c.} = \epsilon_{sel} \cdot \epsilon_{mod} \tag{9.55}$$

第一项ϵ_{sel}称为判选效率,其变化与N_{sel}密切相关; 第二项ϵ_{mod}称为模拟效率,其变化与N_{sel}毫不相关. 这样$\epsilon_{m.c.}$可以表示为

$$\zeta^2_{\epsilon_{m.c.}} = \zeta^2_{\epsilon_{sel}} + \zeta^2_{\epsilon_{mod}} \tag{9.56}$$

代入式(9.53),有

$$\zeta_{N_{obs}}^2 = \zeta_{N_{sel}}^2 + \zeta_{\epsilon_{sel}}^2 - 2 \cdot \frac{Cov(N_{sel}, \epsilon_{sel})}{N_{sel} \cdot \epsilon_{sel}} + \zeta_{\epsilon_{mod}}^2 \tag{9.57}$$

式(9.57)中前三项只与判选误差有关;最后一项只与模拟误差有关,若定义

$$\zeta_{N_\epsilon}^2 = \zeta_{N_{sel}}^2 + \zeta_{\epsilon_{sel}}^2 - 2 \cdot \frac{Cov(N_{sel}, \epsilon_{sel})}{N_{sel} \cdot \epsilon_{sel}} \tag{9.58}$$

可将式(9.57)写成彼此无关的两部分之和:

$$\zeta_{N_{obs}}^2 = \zeta_{N_\epsilon}^2 + \zeta_{\epsilon_{mod}}^2 \tag{9.59}$$

其中N_ϵ表示带判选效率修正的事例数.实际上如果定义

$$N_\epsilon = \frac{N_{sel}}{\epsilon_{sel}} \tag{9.60}$$

其误差由式(9.58)给出.于是N_{obs}形式上可以写成与式(9.52) 相同的样子

$$N_{obs} = \frac{N_\epsilon}{\epsilon_{mod}} \tag{9.61}$$

其误差由式(9.59)给出.式(9.59)形式简明,应用方便,是数据分析中实际采用的公式.

下面具体研究轻子和强子的判选误差与模拟误差,并根据式(9.59)所示的原理求出两者的合成误差,即总系统误差.

表 9.1 : $\mu^+\mu^-$末态的系统误差

Condition	Default	Varied range	Relative error
R_{TOF}	4.5 (ps)	$4.5 \sim 5.0$	0.00980
α_{Acol}	10^0 (degree)	$5 \sim 15$	0.03532
$P - cut$	$(1.75, 0.3)$ (GeV)	$(1.725, 0.25) \sim (1.8, 0.35)$	0.02698
$\lvert cos\theta_\mu \rvert$	0.65	$0.60 \sim 0.675$	0.01842
M^{ID}	3	$2 \sim 4$	0.00721
total selection error			0.05025
error from Monte Carlo			0.00635
total systematic error			0.05065

9.2.1 轻子误差

$\mu^+\mu^-$和e^+e^-末态的有关误差罗列在表 9.1和表 9.2中. 判选误差可以在合理的范围内变动事例判选条件,由变动前后实验观测事例数的差别求出[11]. 模拟误差可以调节反应过程的蒙特卡罗事例产生子的参数,或者利用同一模型的事例产生子,通过调节参数前后求得的探测效率的差别,或者利用不同模型的事例产生子求得的探测效率的差别求出.

对$\mu^+\mu^-$事例来说,产生子RADMU的可调参数有两个:一个是能量E_{cm};另一个是产生事例数$N_{produce}$.此两者带来的总误差为0.635%.

对e^+e^-事例来说,产生子RADEE的可调参数有三个,前两个与$\mu^+\mu^-$事例相同, 第三个是粒子允许的运动空间范围(由$cos\theta$值控制).最终的总误差[12]是0.887%.

表 9.2 : e^+e^-末态的系统误差

Condition	Default	Varied rang	Relative error
$E_{depsoit}$	1.2 (GeV)	$1.0 \sim 1.4$	0.01766
$Rib - cut$	$(0.03, 0.85, 0.95)$(m)	$(0.025, 0.875, 0.925)$ $\sim (0.04, 0.8, 1.0)$	0.00771
$\|cos\theta_e\|$	0.72	$0.70 \sim 0.74$	0.01006
$P - cut$	$(1.75, 0.3)$ (GeV)	$(1.725, 0.25) \sim (1.8, 0.35)$	0.00540
total seletion error			0.02240
error from Monte Carlo			0.00887
total systematic error			0.02409

9.2.2 强子误差

由于强子末态峰值处的事例数约是平台处事例数的40倍,两者相差过于悬殊, 因此将强子事例的误差将分为连续区和共振区两部分予以考虑.两部分的判选误差列如表9.3和表 9.4.

[11]事例判选条件的变化可以有两个方向,一是趋严变化,即提高对事例拓扑性质的要求,样本趋纯,事例数减少;一是放宽变化,即降低对事例拓扑性质的要求,样本纯度下降,事例数增多.不同的变化趋势带来的误差不同,保守起见,两者相较取其大.

[12]具体的说,不同的能量参数E_{cm}=3.670,3.678,3.690,3.705(Gev); 产生事例数为$N_{produce}$= 10000,20000,50000,100000; 空间范围限制$\cos\theta$= 0.75,0.80,0.85,0.90.

强子的模拟误差也分为连续区和共振区两部分.质心系能量E_{cm}和产生事例数$N_{produce}$带来的误差分别为0.754%(连续区),0.105%(共振区). 另外,模型不同导致的误差约为2%.故总的模拟误差为2.137%(连续区), 2.003%(共振区).

表 9.3 : 强子连续区的判选误差

Type		Condition	Default	Varied range	Relative error
TRACK LEVEL	For neutral track	E_{sc}	80 (MeV)	$60 \sim 100$	**0.01097**
		θ_{charge}	15^0 (degree)	$10 \sim 20$	**0.00099**
		θ_{emit}	36^0 (degree)	$30 \sim 40$	**0.00423**
	For charged track	V_r	0.02 (m)	$0.015 \sim 0.025$	**0.02501**
		N_{dedx}	17	$16 \sim 18$	**0.00810**
		$\|cos\theta\|$	0.80	$0.75 \sim 0.84$	**0.03436**
EVENT LEVEL		E_{sum}	0.36 E_{beam}	$0.30 \sim 0.40$	**0.01453**
		α_{Acol}	10^0 (degree)	$6 \sim 15$	**0.02595**
		$N_{mfit=2}$	1 track	$1 \rightarrow 2$	**0.03606**
error from different method					**0.01**
total selection error					**0.06555**
error from Monte Carlo					**0.02137**
total sysytematic error					**0.06894**

表 9.4 : 强子共振区的判选误差

Type		Condition	Default	Varied range	Relative error
TRACK LEVEL	For neutral track	E_{sc}	80 (MeV)	$60 \sim 100$	**0.00328**
		θ_{charge}	15^0 (degree)	$10 \sim 20$	**0.00016**
		θ_{emit}	36^0 (degree)	$30 \sim 40$	**0.00049**
	For charged track	V_r	0.02 (m)	$0.015 \sim 0.025$	**0.00759**
		N_{dedx}	17	$16 \sim 18$	**0.00071**
		$\|cos\theta\|$	0.80	$0.75 \sim 0.84$	**0.00290**
EVENT LEVEL		E_{sum}	0.36 E_{beam}	$0.30 \sim 0.40$	**0.00280**
		α_{Acol}	10^0 (degree)	$6 \sim 15$	**0.00308**
		$N_{mfit=2}$	1 track	$1 \rightarrow 2$	**0.01987**
error from different method					**0.01**
total selection error					**0.02428**
error from Monte Carlo					**0.02003**
total systematic error					**0.03148**

9.3 $\pi^+\pi^-J/\psi$末态的误差分析

在本文工作进行的同时,Fred Harris 教授对$\pi^+\pi^-J/\psi$末态进行了细致深入的研究[13]. 这里只就相关内容引用如下.

表 9.5 : $N_{\pi^+\pi^-J/\psi}$ BWFIT 结果

Bin	$N_{\pi^+\pi^-J/\psi}$	$\Delta N_{\pi^+\pi^-J/\psi}$	CL(%)	Bin	$N_{\pi^+\pi^-J/\psi}$	$\Delta N_{\pi^+\pi^-J/\psi}$	CL(%)
1	5.0	12.5	16.3	13	2624.	86.7	14.1
2	6.9	13.2	0.6	14	2786.	89.5	89.0
3	24.6	13.9	12.8	15	2459.	86.1	52.0
4	0.0	0.03	92.9	16	2067.	78.2	47.9
5	11.0	14.7	68.2	17	1189.	59.6	76.1
6	26.2	15.8	69.2	18	848.1	50.4	82.2
7	59.1	19.0	81.6	19	667.5	44.8	73.1
8	203.2	27.3	70.8	20	264.2	31.1	51.9
9	422.7	37.4	39.7	21	136.0	24.2	22.0
10	629.8	45.6	94.2	22	71.0	21.5	23.0
11	1454.	64.1	92.7	23	85.0	19.3	42.1
12	2469.	84.8	7.9	24	27.8	17.1	29.9

表 9.6 : $N_{\pi^+\pi^-J/\psi}$判选的系统误差分析(%)

Variable	Variation	Error(%)
Pion acceptance - $\epsilon_{\pi^+\pi^-J/\psi}$		0.5
Howl and Lund Charm comparison - $\epsilon_{\pi^+\pi^-J/\psi}$		0.3
Track efficienvy - ϵ^2_{ration}		2.0
Bhabha (3%)		0.33
$N_{\pi^+\pi^-J/\psi}$ **Errors**		
$\cos\theta_\pi$	$0.75 \rightarrow 0.70$	0.91
$\cos\theta_{\pi\pi}$	$0.9 \rightarrow 0.85$	0.33
p_{xy} cut	off	0.72
Non flat $\cos\theta_\pi$		0.37
$N_{\pi^+\pi^-J/\psi}$ fitting method		0.96
Lepton Cuts		
p_l cut	$1.3 \rightarrow 1.4$	0.13
E/p cut	$0.6/p \rightarrow 0.7/p1.4$	0.0
$\cos\theta_\mu$ cut	$0.6 \rightarrow 0.65$	1.54
$\cos\theta_e$	$0.75 \rightarrow 0.70$	0.91
Back to back cuts	remove	1.27
Total Systematic Error (so far)		3.434

[13] 参见Fred Harris 教授的Memo "$\mathcal{B}(\psi(2S) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi)$" (March 25,2001)