第七章 截面计算

本章首先说明截面计算的一般概念.之后简单介绍计算共振截面常用的Breit-Wigner 公式.随后讨论关于截面的辐射效应修正与真空极化效应修正.最后给出拟合中应用的观测截面的计算公式[1].

7.1 截面计算的一般概念

截面的概念最早起源于α粒子的散射实验.二十世纪初,卢瑟福(Rutherford) 首先求出了一个能量为E的α粒子,被厚度为t,每立方米中有n个原子核的金属箔所散射,偏转角在θ与$\theta + d\theta$之间的几率公式

$$dP(\theta) = \frac{nt}{16}(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon E})^2 \cdot \frac{2\pi\sin\theta d\theta}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}} \tag{7.1}$$

式中因子$2\pi\sin\theta d\theta$表示粒子在上述散射中进入的立体角,常记为$d\Omega$.以之除上式,得到α粒子在θ方向单位立体角中的散射几率为

$$\frac{dP(\theta)}{d\Omega} = \frac{nt}{16}(\frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon E})^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\dfrac{\theta}{2}} \tag{7.2}$$

式(7.1)与(7.2)即著名的**卢瑟福散射公式**的两种表述形式[33].由于$dP(\theta)$具有面积量纲,故称之为截面,常记为$d\sigma$, 单位靶,记作$barn$或b^2. 将$d\sigma$积分后得到积分截面,又称总截面,记为σ或$\sigma(W)$,变量W 表示与一定的能量有关.

随着量子理论和高能物理实验的发展,截面的研究早已从经典领域迈进了量子领域. 在当今微观世界的探索过程中,各类散射(弹性、非弹性、反应)实验已成为研究粒子之间相互作用及其内部结构的重要手段.截面的内涵日益丰富,描述形式日益精

[1]本章前两节是有关截面计算的基础知识的介绍;随后的内容是王平博士和朱永生教授研究工作的整理与复述.

[2]$1barn = 10^{-24}cm^2$,高能物理中常用的单位是nb, $1nb = 10^{-9}barn$.

细. 从理论方面讲,除了最初需要考虑的电磁作用因素外,还需要考虑软光子、硬光子的辐射效应,真空极化效应等等.这些考虑常表现为对最初截面的一种修正,譬如说辐射修正,真空极化修正等.包含了修正的截面记为$\tilde{\sigma}(W)$.从实验方面讲,加速器运行时的能量并非理想化的纯一值,而是在某一特定值(记为W)附近呈现一定的分布.描述这种分布的变量记为W',分布函数记为$G(W,W')$. 综合理论与实验多方的考虑, 观测截面可以计算如下:

$$\sigma(W)=\int_0^{\infty} dW' G(W,W')\tilde{\sigma}(W') \tag{7.3}$$

影响实验能量的因素很多,但能量分布的形式根据经验来说较为简单,通常取为高斯分布

$$G(W,W')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta}exp[\frac{-(W-W')^2}{2\Delta^2}] \tag{7.4}$$

式中Δ为能散,是描述能量分布的主要参数.

影响理论截面的因素也很多,而且导致截面的形式很复杂.譬如辐射修正会对截面产生影响[34],这种影响可由一个形式复杂的函数D描述,涉及到的多种因素用参数矢量$\vec{x}$描述.于是修正后的截面可以表示为

$$\tilde{\sigma}(W)=\int d\vec{x}D(\vec{x})\bar{\sigma}(W,\vec{x}) \tag{7.5}$$

其中$\bar{\sigma}(W,\vec{x})$是无辐射修正的初始截面.又譬如真空极化会对截面产生影响,这种影响可通过一个因子$\delta(W)$来体现,即

$$\Delta\bar{\sigma}(W,\vec{x})=\delta(W)\sigma_0(W,\vec{x}) \tag{7.6}$$

其中$\sigma_0(W,\vec{x})$则是无极化修正的零级截面.下面先介绍零级截面的Breit-Wigner形式,之后讨论修正问题.

7.2 Breit-Wigner公式

初态a、b反应产生某末态X,假定反应是通过某一中间态V进行,即

$$a+b\to V\to X \tag{7.7}$$

则反应截面可表示为

$$\sigma(a+b\to V\to X)=\frac{(2S_V+1)}{(2S_a+1)(2S_b+1)}\cdot\frac{16\pi m_V^4}{\lambda(m_V^2,m_a^2,m_b^2)}\cdot\frac{\Gamma(V\to X)\cdot\Gamma(\bar{V}\to\bar{a}+\bar{b})}{(s-m_V^2)^2+m_V^2\Gamma(V\to all)} \tag{7.8}$$

式中S_V、S_a、S_b分别为中间态初态的角动量;m_V、m_a、m_b 是它们相应的质量.函数$\lambda(x^2,y^2,z^2)$定义为

$$\begin{aligned}\lambda(x^2,y^2,z^2) &= x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2 && (7.9)\\ &= x^4-2(y^2+z^2)x^2+(y^2-z^2)^2 && (7.10)\\ &= [x^2-(y+z)^2]\cdot[x^2-(y-z)^2] && (7.11)\\ &= (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z) && (7.12)\end{aligned}$$

$\Gamma(V\to X)$或$\Gamma(V\to all)$表示中间态V衰变到末态X的分宽度或衰变到所有末态的总宽度(又记为Γ_t或简记为Γ). 过程$\bar{V}\to\bar{a}+\bar{b}$是过程$a+b\to V$的逆过程; $\bar{V}$、$\bar{a}$、$\bar{b}$是相应于V、a、b的反粒子; $\Gamma(\bar{V}\to\bar{a}+\bar{b})$是$\bar{V}$衰变到$\bar{a}$、$\bar{b}$末态的分宽度.$s$表示$a$、$b$系统的质心系总能量的平方($s=E_{cm}^2$).

对于e^+e^-对撞,产生共振态R再衰变到某末态f的过程,记$\Gamma(R\to f)$ 为Γ_f.由于e^+、e^-互为反粒子,e^+、e^-系统对撞产生的共振态R 为自身的反粒子,因此$e^++e^-\to R$过程的逆过程为$R\to e^++e^-$,故此$\Gamma(\bar{R}\to\bar{e}^++\bar{e}^-)=\Gamma(R\to e^++e^-)$,亦即共振态$R$衰变为电子对的分宽度, 记为$\Gamma_e$.在高能对撞中(对$\psi(2S)$,$s\sim 3.68^2\ GeV^2$),产生的共振态质量$M\gg m_{e^+}$,$m_{e^-}$,根据式(7.10)可得

$$\lambda(M^2,m_{e^+}^2,m_{e^-}^2)\cong M^4 \tag{7.13}$$

初态e^+、e^-的角动量即电子的自旋$S_{e^+}=S_{e^-}=\frac{1}{2}$.设共振态的角动量为$J$,将关于$e^+e^-$ 对撞的参数代入式(7.8),得

$$\sigma_{BW}(s)\equiv\sigma(e^++e^-\to R\to f)=\frac{4\pi(2J+1)\Gamma_e\Gamma_f}{(s-M^2)^2+M^2\Gamma^2} \tag{7.14}$$

此即描写共振截面常用的**Breit-Wigner公式**[35].对$\psi(2S)$,$J=1$,故有

$$\sigma_{BW}(s)=\frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_f}{(s-M^2)^2+M^2\Gamma^2} \tag{7.15}$$

有时用W表示质心能量,$W=\sqrt{s}$;$\sigma_{BW}(s)$也记为$\sigma_{BW}(W)$. 变量s与W视方便而定,都很常用.在共振峰处$s=M^2$,式(7.15)成为

$$\sigma_{BW}(M)=\frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_f}{M^2\Gamma^2} \tag{7.16}$$

此时两个末态f_1、f_2截面之比等于其宽度或分支比之比:

$$\frac{\sigma_{BW}(f_1)}{\sigma_{BW}(f_2)} = \frac{\Gamma_{f_1}}{\Gamma_{f_2}} = \frac{\Gamma_{f_1}/\Gamma}{\Gamma_{f_2}/\Gamma} = \frac{\mathcal{B}_{f_1}}{\mathcal{B}_{f_2}} \tag{7.17}$$

7.3 辐射修正

为了精确地测量共振参数,如质量、衰变宽度等,必须精确地处理初态e^+e^-的光子辐射对共振截面的修正效应(辐射修正).E.Kuraev和V.Fadin提出的结构函数方法可以正确地处理这类辐射修正问题[36][37],其精度好于0.1%. 依据他们的方法,辐射截面$\tilde{\sigma}$可以表示为

$$\tilde{\sigma}(s) = \underbrace{\int^1\int^1}_{x_1+x_2\geq 2-\Delta E/E} dx_1 dx_2 \sum_{A=e^+,e^-} D^A_{e^-}(x_1,s) D^{\bar{A}}_{e^+}(x_2,s) \bar{\sigma}_{A\bar{A}}(x_1 x_2 s) \tag{7.18}$$

式中ΔE为能量分辨率,并假定$\Delta E \ll E$.$D^A_e(x,s)$是电子分布函数,描写e^+e^-辐射光子后剩余纵动量为x的概率分布. $\bar{\sigma}_{A\bar{A}}(x_1x_2s)$是电子、正电子在初态对撞顶点上,在质心系总能量平方为x_1x_2s的情况下,相撞后某一过程的截面.

改变积分变量,引入新变量x,将式(7.18)改写成

$$\tilde{\sigma}(s) = \int_0^{\varepsilon} dx \bar{\sigma}[s(1-x)] F(x,s) \tag{7.19}$$

式中积分上限ε由特定的过程决定.本文研究的过程ε取为1, 对应正(或负)电子的全部能量转化为光子能量的情况.定义

$$x_1 x_2 = 1 - x \tag{7.20}$$

而$F(x,s)$是描写辐射光子谱的函数,称为辐射因子(radiator),定义为

$$F(x,s) = \int_{1-x}^{1} \frac{dz}{z} \cdot D^A_{e^-}(z,s) D^{\bar{A}}_{e^+}(\frac{1-x}{z}, s) \tag{7.21}$$

式(7.19)是e^+e^-对撞中单光子湮没道下各种过程的普适性截面表达式. 下面详细研究式(7.19)中各项的内容,推导出实验拟合中切实可用的解析近似式[38].首先$F(x,s)$可以表达为如下形式

$$F(x,s) = x^{t-1} t \cdot \left[((K)) + \frac{3}{4}t + t^2(\frac{9}{32} - \frac{\pi^2}{12}) \right]$$

$$+x^t(-t-\frac{t^2}{4})+x^{t+1}(\frac{t}{2}-\frac{3}{8}t^2)+O(x^{t+1}t^2) \tag{7.22}$$

式中$((K))$称为K-因子,与辐射修正计算的精度要求有关,对本实验的精度要求来说,K-因子取为

$$((K))=1+\frac{\alpha}{\pi}(\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}) \tag{7.23}$$

式(7.22)中省略的项都高于$x^{t+1}t^2$,保留的项系数中都含t,

$$t=\frac{2\alpha}{\pi}(ln\frac{s}{m_e^2}-1) \tag{7.24}$$

由于$x<1$,$t<1$,因此省略的都是高阶小量.若$\bar{\sigma}[s(1-x)]$取为Breit-Wigner形式$\bar{\sigma}_{BW}[s(1-x)]$,即式(7.15), 略去高阶项,式(7.19)成为

$$\tilde{\sigma}(s)=\int_0^1\frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_f dx}{[s(1-x)-M^2]^2+M^2\Gamma^2}\cdot$$

$$\left\{x^{t-1}t\left[((K))+\frac{3}{4}t+t^2(\frac{9}{32}-\frac{\pi^2}{12})\right]-x^t(t+\frac{t^2}{4})+x^{t+1}(\frac{t}{2}-\frac{3}{8}t^2)\right\} \tag{7.25}$$

上式第一项,含$x^{t-1}t$的项,解析可积,只需利用关系式(当$\nu<2$时)

$$\int_0^\infty\frac{\nu x^{\nu-1}dx}{x^2+2ax\cos\theta+a^2}=a^{\nu-2}\cdot\frac{\pi\nu\sin[\theta(1-\nu)]}{\sin\theta\sin\pi\nu} \tag{7.26}$$

并扣除从1到∞的部分(注意式(7.25)的积分从0到1),得到

$$\int_0^1\frac{tx^{t-1}dx}{[s(1-x)-M^2]^2+M^2\Gamma^2}=\frac{1}{s^2}\cdot a^{t-2}\phi(\cos\theta,t)$$

$$+\frac{t}{s^2}\cdot\left[\frac{1}{t-2}+\frac{2(s-M^2)}{(t-3)s}+\frac{3(s-M^2)^2-M^2\Gamma^2}{(t-4)s^2}\right] \tag{7.27}$$

其中

$$a^2 = (1-\frac{M^2}{s})^2+\frac{M^2\Gamma^2}{s^2} \quad (a>0) \tag{7.28}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{a}\cdot(\frac{M^2}{s}-1) \tag{7.29}$$

$$\phi(\cos\theta,y) = \frac{\pi y\sin[\theta(1-y)]}{\sin\theta\sin\pi y} \tag{7.30}$$

类似地求出式(7.25)中含x^t项的积分

$$\int_0^1 \frac{x^t dx}{[s(1-x)-M^2]^2+M^2\Gamma^2} = \frac{1}{(t+1)s^2}\cdot a^{t-2}\phi(\cos\theta, t+1)$$

$$+\frac{1}{s^2}\cdot\left[\frac{1}{t-1}+\frac{2(s-M^2)}{(t-2)s}+\frac{3(s-M^2)^2-M^2\Gamma^2}{(t-3)s^2}\right] \tag{7.31}$$

以及含x^{t+1}项的积分

$$\int_0^1 \frac{x^{t+1} dx}{[s(1-x)-M^2]^2+M^2\Gamma^2} = \frac{1}{(t+2)s^2}\cdot a^{t-2}\phi(\cos\theta, t+2)$$

$$+\frac{1}{s^2}\cdot\left[\frac{1}{t}+\frac{2(s-M^2)}{(t-1)s}+\frac{3(s-M^2)^2-M^2\Gamma^2}{(t-2)s^2}\right] \tag{7.32}$$

将式(7.32)、(7.31)、(7.27)代回式(7.25)有

$$\tilde{\sigma}_{SE}(s) = \frac{12\pi\Gamma_e\Gamma_f}{s^2}\cdot\Big\{(1+\delta)t\cdot$$

$$\left[\frac{1}{t}\cdot a^{t-2}\phi(\cos\theta,t)+\frac{1}{t-2}+\frac{2(s-M^2)}{(t-3)s}+\frac{3(s-M^2)^2-M^2\Gamma^2}{(t-4)s^2}\right]$$

$$-t(1+\frac{1}{4})\cdot$$

$$\left[\frac{1}{(t+1)}\cdot a^{t-2}\phi(\cos\theta,t+1)+\{\frac{1}{t-1}+\frac{2(s-M^2)}{(t-2)s}+\frac{3(s-M^2)^2-M^2\Gamma^2}{(t-3)s^2}\right]$$

$$+(\frac{t}{2}-\frac{3}{8}t^2)\cdot$$

$$\left[\frac{1}{(t+2)}\cdot a^{t-2}\phi(\cos\theta,t+2)+\{\frac{1}{t}+\frac{2(s-M^2)}{(t-1)s}+\frac{3(s-M^2)^2-M^2\Gamma^2}{(t-2)s^2}\right]\Big\} \tag{7.33}$$

其中

$$\delta = \frac{\alpha}{\pi}(\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2})+\frac{3}{4}t+t^2(\frac{9}{32}-\frac{\pi^2}{12}) \tag{7.34}$$

式(7.33)即为含辐射修正的共振截面的解析近似式.

7.4 真空极化因子

考虑式(7.6)中表示真空极化效应的真空极化因子$\delta(W)$. 在真空极化因子的研究中[39],既要考虑不同末态粒子(轻子与强子)的区别, 又要考虑不同反应道[3] (s道、t道及其相干项)的差异.具体地说

$$\begin{aligned}
\delta_{vac}(s) &= \delta_{vac}^{lep}(s)+\delta_{vac}^{had}(s) && (s\ \text{道}) \quad (7.35)\\
\delta_{vac}(t) &= \delta_{vac}^{lep}(t)+\delta_{vac}^{had}(t) && (t\ \text{道}) \quad (7.36)\\
\delta_{vac}(int) &= \sqrt{1+\delta_{vac}(s)}\cdot\sqrt{1+\delta_{vac}(t)}-1 && (\text{相干项}) \quad (7.37)\\
&\cong \frac{1}{2}(\delta_{vac}(s)+\delta_{vac}(t)) && (\delta_{vac}(s)\text{、}\delta_{vac}(t)\ \text{为小量}) \quad (7.38)
\end{aligned}$$

轻子的真空极化因子可以进一步细分为

$$\begin{aligned}
\delta_{vac}^{lep}(s) &= \delta_{vac}^{e}(s)+\delta_{vac}^{\mu}(s)+\delta_{vac}^{\tau}(s) && (7.39)\\
\delta_{vac}^{lep}(t) &= \delta_{vac}^{e}(t)+\delta_{vac}^{\mu}(t)+\delta_{vac}^{\tau}(t) && (7.40)
\end{aligned}$$

式(7.38)中的各项$\delta_{vac}(s)$、$\delta_{vac}(t)$与$\delta_{vac}(int)$都是能量的函数.根据场论的计算

$$\delta_{vac} = \begin{cases} -2\cdot Re\Pi(s) & (s\ \text{道})\\ -2\cdot Re\Pi(t) & (t\ \text{道})\\ -Re\Pi(s)-Re\Pi(t) & (s\text{与}t\text{的干涉}) \end{cases} \quad (7.41)$$

其中$\Pi(s,t)$是描述真空极化效应的因子.下面针对轻子与强子两部分,具体考察真空极化因子的计算.

7.4.1 轻子部分的极化因子

♠ $s>4m_l^2$,m_l 是轻子质量($l=e,\mu,\tau$)

$$Re\Pi(s,m_l^2)=\frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{8}{9}-\frac{a^2}{3}+a\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{a^2}{6}\right)\cdot\ln b\right] \quad (7.42)$$

式中

$$a=(1-\frac{4m_l^2}{s})^{\frac{1}{2}}, \qquad b=\frac{1-a}{1+a} \quad (7.43)$$

[3]在高能相对论运动学中,对于初态、末态均为两体的反应过程,常常采用s、t变量,它们表示相应于不同反应类型(称为s道反应与t道反应)的质心系能量的平方,皆为洛仑兹不变量.

♠ $s < 4m_l^2$

$$Re\Pi(s, m_l^2) = \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{8}{9} + \frac{a^2}{3} - 2a\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{6}\right)\cdot\cot^{-1}(a)\right] \tag{7.44}$$

式中

$$a = (\frac{4m_l^2}{s} - 1)^{\frac{1}{2}} \tag{7.45}$$

♠ $t < 0$,$t = -s\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}$($\theta$:极角), 故$Re\Pi(t, m_l^2)$是能量$E_{cm}$和角度$\theta$的函数.

$$Re\Pi(t, m_l^2) = \frac{\alpha}{\pi}\left[\frac{8}{9} - \frac{a^2}{3} + a\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{6}\right)\cdot\ln(-b)\right] \tag{7.46}$$

式中

$$a = (1 - \frac{4m_l^2}{t})^{\frac{1}{2}}, \qquad b = \frac{1-a}{1+a} \tag{7.47}$$

7.4.2 强子部分的极化因子

♠ 对s道

$$\begin{aligned} Re\Pi_h(s) = &\frac{-3s}{\alpha}\sum_{resonanaces}\frac{\Gamma_e^0}{M}\cdot\frac{s-M^2}{M^2\Gamma_{tot}^2 + (s-M^2)^2} \quad (\text{共振态部分}) \\ &-\frac{\alpha}{3\pi}R(s_1)\ln\left|\frac{s-s_1}{s_1}\right| + \frac{s}{4\pi^2\alpha}\int_{4m_\pi^2}^{s_1}\frac{\sigma_h(s')-\sigma_h(s)}{s'-s}ds' \\ &+\frac{s\cdot\sigma_h(s)}{4\pi^2\alpha}\ln\left|\frac{s_1-s}{4m_\pi^2-s}\right| \qquad (\text{连续态,即}R\text{-值部分}) \end{aligned} \tag{7.48}$$

式中共振态部分的求和包括各种共振态,譬如ρ,ω,ϕ,J/ψ, $\psi(2S)$,Υ等等.其中$R(s_1)$是s_1[4]处的R-值,故式(7.48) 中的第二项可借用$\sigma_h(s_1)$表示$R(s_1)$,写成为

$$-\frac{s_1\cdot\sigma_h(s_1)}{4\pi^2\alpha}\ln\left|\frac{s-s_1}{s_1}\right| \tag{7.49}$$

其中$\sigma_h(s_1)$表示在$s = s_1$处,e^+e^-对撞产生的强子末态的截面.当$s < 4m_\pi^2$时$\sigma_h(s)$等于零.

♠ 对t道,将式(7.48)中的变量s换成t,同时保持s_1的值不变即可.

式(7.48)中的第一项在共振峰附近$s = M_{\psi(2S)}^2$处,函数行为尤其跌宕突兀,扣除$\psi(2S)$自身的影响,整个$Re\Pi_h(s)$的函数行为变得非常平缓.实际上,上述各真空极化因子的函数行为在扫描范围内(3.67 GeV ∼ 3.71 GeV)都极为平缓,均可作为常数处理.

[4] s_1是大尺度能标,按照Berends 的程序$s_1 = (9.5^2 + 10)\ GeV^2$.

7.5 观测截面的计算

实际实验中的观测截面除前面讨论的共振部分外,还包括非共振部分,即连续部分以及共振部分和连续部分的相干部分.因此观测截面应该表述为

$$\begin{aligned}
\sigma_h^{obs}(W) &= \sigma_h^R(W)A_h^R + \sigma_h^C(W)A_h^C + \sigma_h^I(W)A_h^I && (7.50)\\
\sigma_{\pi\pi J/\psi}^{obs}(W) &= \sigma_{\pi\pi J/\psi}^R(W)A_{\pi\pi J/\psi}^R && (7.51)\\
\sigma_e^{obs}(W) &= \sigma_e^R(W)A_e^R + \sigma_e^{QED}(W)A_e^{QED} + \sigma_e^I(W)A_e^I && (7.52)\\
\sigma_\mu^{obs}(W) &= \sigma_\mu^R(W)A_\mu^R + \sigma_\mu^{QED}(W)A_\mu^{QED} + \sigma_\mu^I(W)A_\mu^I && (7.53)
\end{aligned}$$

其中A_f是对应过程$e^+e^- \to f(f=e,\mu,h)$的实验接收度, C标志连续部分, R标志共振部分, I标志相干部分.对强子末态, 来自QCD的连续部分的截面相对而言非常之小,干涉效应微乎其微,以致可以忽略, 即$\sigma_h^I(W) \approx 0$.对于e^+e^-末态,相干部分的接收度取为$A_e^I = \sqrt{A_e^R \cdot A_e^{QED}}$;对于$\mu^+\mu^-$末态,类似地取$A_\mu^I = \sqrt{A_\mu^R \cdot A_\mu^{QED}}$.于是观测截面的计算公式化为

$$\begin{aligned}
\sigma_h^{obs}(W) &= \sigma_h^R(W)A_h^R + \sigma_h^C(W)A_h^C && (7.54)\\
\sigma_{\pi\pi J/\psi}^{obs}(W) &= \sigma_{\pi\pi J/\psi}^R(W)A_{\pi\pi J/\psi}^R && (7.55)\\
\sigma_e^{obs}(W) &= \sigma_e^R(W)A_e^R + \sigma_e^{QED}(W)A_e^{QED} + \sigma_e^I(W)\sqrt{A_e^R \cdot A_e^{QED}} && (7.56)\\
\sigma_\mu^{obs}(W) &= \sigma_\mu^R(W)A_\mu^R + \sigma_\mu^{QED}(W)A_\mu^{QED} + \sigma_\mu^I(W)\sqrt{A_\mu^R \cdot A_\mu^{QED}} && (7.57)
\end{aligned}$$

可见,对于$\psi(2S)$共振参数的测量,需要知道6个接收度,即A_h^R,A_h^C, A_e^R,A_e^{QED},A_μ^R,A_μ^{QED}.有关接收度的计算详见第8章.

综合上述各节的结果,得到拟合中将用到的计算观测截面的近似解析式.现分不同末态分叙如次.下面公式中用到的常数或函数,例如a^2,$\cos\theta$, $\phi(\cos\theta,t)$,t,δ,$\delta_{vac}(s)$,$\delta_{vac}(t)$等等,其定义参见式(7.28),(7.29),(7.30), (7.24),(7.34),(7.35),(7.36)等等.

7.5.1 强子末态的截面公式

♡ 共振部分

$$\sigma_h^R(W) = \frac{12\pi\Gamma_h\Gamma_e^0}{W^4}(1+\delta_{vac}(s))\cdot$$

$$\left\{(1+\delta)a^{t-2}\phi(\cos\beta,t) + (-t+\frac{3}{4}t^2)a^{t-1}\phi(\cos\beta,t+1)\right\} \qquad (7.58)$$

♡ 非共振部分

$$\sigma_h^C = \tilde{R}\sigma_\mu^0(QED) = \tilde{R}\frac{4\pi\alpha^2}{3W^2} = \tilde{R}\frac{86.854554(nb)}{W^2(GeV^2)} \tag{7.59}$$

式中$\tilde{R}$是带辐射修正的R值,即

$$\tilde{R} = R\cdot(1+\delta_{rad}) \tag{7.60}$$

其中δ_{rad}为连续区的辐射修正因子.

♠ 强子末态的总截面

$$\sigma_h^{obs}(W,\theta) = A_h^R(\theta)\sigma_h^R(W) + A_h^C(\theta)\sigma_h^C(W)$$

$$= A_h^R(\theta)\sigma_h^R(W) + A_h^C(\theta)\cdot\frac{\tilde{R}\cdot 86.854554(nb)}{W^2(GeV^2)} \tag{7.61}$$

式中$A(\theta)$指在$(\theta\to\pi-\theta)$立体角范围内通过事例筛选后的强子事例占全空间强子事例的比率,即强子接收度.

7.5.2 $\pi^+\pi^-J/\psi$末态的截面公式

对于某个特定的强子末态,譬如说$\psi(2S)\to\pi^+\pi^-J/\psi$, 这时只有共振部分的截面存在,观测截面的计算较为简单

$$\sigma_{\pi\pi J/\psi}^{obs}(W) = A_{\pi\pi J/\psi}(\theta)\cdot\frac{12\pi\Gamma_{\pi\pi J/\psi}\Gamma_e^0}{W^4}\cdot(1+\delta_{vac}(s))\cdot$$

$$\left\{(1+\delta)a^{t-2}\phi(\cos\beta,t) + (-t+\frac{3}{4}t^2)a^{t-1}\phi(\cos\beta,t+1)\right\} \tag{7.62}$$

式中$A_{\pi\pi J/\psi}(\theta)$指在$(\theta\to\pi-\theta)$ 立体角范围内通过事例筛选后的$\pi^+\pi^-J/\psi$事例占全空间$\pi^+\pi^-J/\psi$事例的比率,即$\pi^+\pi^-J/\psi$收度.

7.5.3 $\mu^+\mu^-$末态的截面公式

$\mu^+\mu^-$末态的观测总截面为

$$\sigma_\mu^{obs}(W,\theta) = A_\mu^R(\theta)\sigma_\mu^R(W) + A_\mu^{QED}(\theta)\sigma_\mu^C(W) + A_\mu^{Int}(\theta)\sigma_\mu^{Int}(W) \tag{7.63}$$

式中$A(\theta)$指在$(\theta \rightarrow \pi-\theta)$立体角范围内通过事例筛选后的$\mu^+\mu^-$末态事例占全空间$\mu^+\mu^-$末态事例的比率,即$\mu^+\mu^-$末态的接收度. 考虑到实验拟合的QED平台与理论预期的值之间可能存在偏差,引入表征这种偏差的参数η,将观测总截面改写为

$$\sigma_\mu^{obs}(W,\theta)=A_\mu^R(\theta)\sigma_\mu^R(W)+\eta\cdot A_\mu^C(\theta)\sigma_\mu^{QED}(W)+\sqrt{\eta}\cdot A_\mu^{Int}(\theta)\sigma_\mu^{Int}(W) \quad (7.64)$$

对$\mu^+\mu^-$末态来说,共振部分(R)、连续部分(QED)以及共振部分和连续部分的相干部分(Int),都是对s道而言.具体的表达式如下

$$\sigma_\mu^{obs}(W,\theta)=\int_0^\infty dW'G(W,W')\tilde{\sigma}(W')$$

积分号内的$\tilde{\sigma}(W)$具有如下形式

$$\tilde{\sigma}(W)=(1+\delta_{vac}(s))\cdot$$

$$\left\{\frac{4\pi\alpha^2}{3W^2}\cdot\eta A_\mu^C(\theta)\cdot\left[1+\frac{t}{2}\cdot\left(2lnX_f-ln(1-X_f)+\frac{3}{2}-X_f\right)+\frac{\alpha}{\pi}(\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2})\right]\right.$$

$$+C_1\cdot(1+\delta_v)\cdot\left[a^{t-2}\phi(\cos\beta,t)+t\cdot\left(\frac{X_f^{t-2}}{t-2}+\frac{X_f^{t-3}}{t-3}R_2+\frac{X_f^{t-4}}{t-4}R_3\right)\right]$$

$$+\left[-t(1+\delta_v)C_2+(-t-\frac{t^2}{4})C_1\right]\cdot\left[\frac{a^{t-1}}{1+t}\phi(\cos\beta,t+1)+\frac{X_f^{t-1}}{t-1}+\frac{X_f^{t-2}}{t-2}R_2+\frac{X_f^{t-3}}{t-3}R_3\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2}ln\frac{X_f^2+2aX_f\cos\beta+a^2}{a^2}-ctg\theta\cdot\left(tg^{-1}\frac{X_f+a\cos\beta}{a\sin\beta}-\frac{\pi}{2}+\beta\right)\right]\cdot$$

$$\left.\left[(t+\frac{t^2}{4})\cdot C_2+(\frac{t}{2}-\frac{3}{8}t^2)\cdot C_1\right]\right\} \quad (7.65)$$

式中

$$R_2 = \frac{2(s-M^2)}{s}=-2a\cos\beta \quad (7.66)$$

$$R_3 = a^2(4\cos^2\beta-1) \quad (7.67)$$

$$X_f = 1-\frac{s_m}{s} \quad (7.68)$$

其中$s_m = 4E_{cut}^2$,E_{cut}是对于μ的切断能量,$E_{cut} = m_\mu$时得到全截面.另外两个量C_1和C_2的定义如下

$$C_1 = \left[8\pi\alpha\cdot\frac{\sqrt{\Gamma_e^0\Gamma_\mu^0}}{M}\cdot(s-M^2)\cdot\sqrt{\eta}A_\mu^{Int}(\theta)+12\pi(\frac{\Gamma_e^0\Gamma_\mu^0}{M^2})\cdot s\cdot A_\mu^R(\theta)\right]\Big/s^2 \quad (7.69)$$

$$C_2 = \left[8\pi\alpha\cdot\frac{\sqrt{\Gamma_e^0\Gamma_\mu^0}}{M}\cdot\sqrt{\eta}A_\mu^{Int}(\theta)+12\pi(\frac{\Gamma_e^0\Gamma_\mu^0}{M^2})\cdot A_\mu^R(\theta)\right]\Big/s \quad (7.70)$$

式中含$\sqrt{\Gamma_e^0\Gamma_\mu^0}$的项为干涉项; 含$\Gamma_e^0\Gamma_\mu^0$的项为共振项.

7.5.4 e^+e^-末态的截面公式

e^+e^-末态的观测总截面为

$$\sigma_e^{obs}(W,\theta) = A_e^R(\theta)\sigma_e^R(W)+A_e^{QED}(\theta)\sigma_e^C(W)+A_e^{Int}(\theta)\sigma_e^{Int}(W) \quad (7.71)$$

由于e^+e^-末态中的QED部分的截面在小角度时发散,故式中$A(\theta)$指在$(\theta\to\pi-\theta)$立体角范围内通过事例筛选后的e^+e^-末态事例与产生子在一定范围内产生的e^+e^-末态事例的比率[5]. 即$A(\theta)$是一定范围内e^+e^-末态的接收度. 上式中各项截面的具体形式如下所列

♡ 共振部分

$$\sigma^R(W) = \frac{2\pi H^2}{S}(1+\delta_{vac}(s))\cdot$$

$$\left\{T_{R0}(1+\delta)a^{t-2}\phi(\cos\beta,t)+[T_{R0}\delta_1+T_{R1}t(1+\delta)]a^{t-1}\frac{\phi(\cos\beta,t+1)}{1+t}\right\} \quad (7.72)$$

♡ QED部分

$$\sigma^{QED}(W) = \frac{2\pi\alpha^2}{S}\cdot\left\{C_{\gamma 0}(1+\delta)x_0^t+\frac{1}{1+t}[C_{\gamma 0}\delta_1+C_{\gamma 1}t(1+\delta)]x_0^{t+1}\right\}$$

$$+\sigma_{0,s}^{QED}(W)\cdot\delta_{vac}(s)+\sigma_{0,t}^{QED}(W)\cdot\delta_{vac}(t)+\sigma_{0,int}^{QED}(W)\cdot\frac{\delta_{vac}(s)+\delta_{vac}(t)}{2} \quad (7.73)$$

[5]产生子产生事例的范围$|\cos\theta_p|(p:roduce)$应该大于事例的筛选范围$|\cos\theta_s|(s:selection)$.在本文的事例判选研究中$|\cos\theta_p|\le 0.80$,$|\cos\theta_s|\le 0.72$.

式中$\sigma_{0,s}^{QED}$、$\sigma_{0,t}^{QED}$与$\sigma_{0,int}^{QED}$分别是e^+e^-末态QED零级截面中s道部分、t道部分与s道和t道的相干部分.

♡ 干涉部分

$$\begin{aligned}\sigma^{Int}(W) = \frac{2\pi\alpha H}{s}\sqrt{(1+\delta_{vac}(s))(1+\delta_{vac}(t))}\cdot \\ \Big\{C_{i0}(1+\delta)\cdot\frac{s-M^2}{S}\cdot a^{t-2}\phi(\cos\beta,t) \\ +\left[-C_{i0}t(1+\delta)s + C_{i0}\delta(S-M^2) + C_{i1}t(1+\delta)(s-M^2)\right]\cdot \\ \frac{1}{(1+t)s}\cdot a^{t-1}\phi(\cos\beta,t+1)\Big\}\end{aligned} \tag{7.74}$$

e^+e^-末态QED零级截面的计算公式如下

$$\begin{aligned}\sigma_0^{QED}(W) = \frac{2\pi\alpha^2}{S}\Bigg[\frac{8C_m}{1-C_m^2} - \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+C_m}{1-C_m}\right| + C_m \qquad &(\ t\ \text{道}) \\ -\frac{1}{2}ln\left|\frac{1+C_m}{1-C_m}\right| + 3C_m \qquad &(\ s\text{与}t\text{的干涉}) \\ +\frac{1}{2}(C_m+\frac{1}{3}C_m^3)\Bigg] \qquad &(\ s\ \text{道})\end{aligned} \tag{7.75}$$

其中$C_m = |\cos\theta_{max}|$,θ_{max}是事例判选条件中角度的最大允许范围,即有$(-C_m < \cos\theta < C_m)$.式(7.74)中其它参数的含义为

$$H = 3\frac{\Gamma_e^0}{M}, \quad \delta_1 = -t - \frac{t^2}{4}, \quad x_0 = \frac{2C_m}{1+C_m}$$

此外还有

$$T_{10} = 2\left(\frac{1+C_m}{1-C_m} - \frac{1-C_m}{1+C_m}\right) \qquad T_{t0} = T_{10}+T_{20}+T_{30}$$

$$T_{20} = 2ln\left(\frac{1-C_m}{1+C_m}\right) \qquad T_{i0} = T_{20}+4T_{30}+T_{40}$$

$$T_{30} = C_m \qquad T_{R0} = T_{30}+T_{40}+T_{50}$$

$$T_{40} = -C_m \qquad T_{t1} = T_{11}+T_{21}+T_{31}$$

$$T_{50} = \frac{1}{12}(6C_m+2C_m^3) \qquad T_{i1} = T_{21}+4T_{31}+T_{41}$$

$$T_{11} = -4\frac{1-C_m}{1+C_m} \qquad T_{R1} = T_{31}+T_{41}+T_{51}$$

$$T_{21} = 2\left(1+ln\frac{1-C_m}{1+C_m}\right) \qquad C_{\gamma 0} = T_{t0}+T_{i0}+T_{R0}$$

$$T_{31} = \frac{1}{2}[2C_m+C_m(1+C_m)-(1+C_m)] \qquad C_{\gamma 1} = T_{t1}+T_{i1}+T_{R1}$$

$$T_{41} = \frac{1}{2}[-2C_m-2C_m(1+C_m)+(1+C_m)^2] \qquad C_{i0} = 2T_{R0}+T_{i0}$$

$$T_{51} = \frac{1}{12}[6C_m+2C_m^3+\frac{3}{2}(1+C_m)(6C_m+2C_m^3)-3(1+C_m)^3] \qquad C_{i1} = 2T_{R1}+T_{i1}$$