第十章 扫描数据拟合

总结前述各章数据分析的结果,关于如下四个过程

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^- \tag{10.1}$$

$$e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^- \tag{10.2}$$

$$e^+e^- \rightarrow hadrons \tag{10.3}$$

$$e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi \tag{10.4}$$

的判选事例数见表 10.1,相应误差见表 10.2. 下面首先说明拟合所用的χ^2方法;其次给出参数拟合的结果;再次介绍拟合误差的确定; 最后是关于测量结果的讨论.

10.1 χ^2方法简介

数据拟合经常用到χ^2最小化方法[52].对于上述4个过程的某一过程的某个能量点而言,其χ^2值定义为

$$\chi^2 = \frac{(\sigma_E - \sigma_T)^2}{(\Delta\sigma_E)^2} \tag{10.5}$$

式中σ_E与σ_T分别表示实验与理论截面, $\Delta\sigma_E$ 是σ_E 的误差.注意到

$$N_{E,T} = L \cdot \sigma_{E,T} \qquad \text{(L:积分亮度)} \tag{10.6}$$

式中N_E与N_T分别是实验测量与理论计算的事例数.当积分亮度L与事例数N_E 的测量相互独立时,依据误差分析理论可知

$$(\frac{\Delta\sigma_E}{\sigma_E})^2 = (\frac{\Delta N_E}{N_E})^2 + (\frac{\Delta L}{L})^2 \tag{10.7}$$

结合上述诸式有

$$\chi^2 = \frac{(N_E - N_T)^2}{(\Delta N_E)^2 + N_E^2 \cdot (\frac{\Delta L}{L})^2} \tag{10.8}$$

表 10.1 : 离线数据分析结果

序号	注入能量	积分亮度†		判选事例数			
	E_b(GeV)	$L(nb^{-1})$	$L^c(nb^{-1})$	N_e	N_μ	N_{Had}	$N_{\pi^+\pi^- J/\psi}$
1	1.83500	31.4599	31.60	1753	111	416	5
2	1.83743	30.5890	30.71	1700	94	406	7
3	1.83900	31.0555	31.16	1723	121	430	25
4	1.84050	31.3947	31.47	1739	100	473	0
5	1.84150	31.5190	31.55	1744	64	505	11
6	1.84190	34.6786	34.68	1918	96	623	26
7	1.84248	32.1132	32.03	1775	89	808	59
8	1.84290	31.8562	31.62	1760	90	1599	203
9	1.84310	31.8269	31.45	1758	74	2739	423
10	1.84332	33.5547	32.94	1835	92	4268	630
11	1.84370	31.9199	30.86	1762	112	8304	1454
12	1.84400	33.3780	31.88	1842	158	14903	2469
13	1.84425	31.5038	29.92	1738	166	15357	2624
14	1.84464	30.8823	29.46	1703	244	15947	2786
15	1.84483	31.4691	30.25	1735	205	15271	2459
16	1.84522	31.0649	30.46	1712	183	11917	2067
17	1.84557	32.0206	31.87	1764	192	7189	1189
18	1.84580	31.5383	31.58	1737	137	5051	848
19	1.84612	39.2321	39.45	2160	194	4073	668
20	1.84693	32.4856	32.73	1787	116	1939	264
21	1.84845	36.5446	36.80	2007	97	1406	136
22	1.85043	35.3998	35.64	1940	132	1064	71
23	1.85232	34.8480	35.08	1906	113	914	85
24	1.85488	35.9174	36.16	1959	119	761	28

†:此处第一项亮度L是由公式$L = N_e/\sigma_e$计算得来，其中σ_e是由Monte Carlo产生子得到的$e^+e^- \to e^+e^-$ ($|\cos\theta| < 0.72$)的截面(详见正文第10.2节);第二项亮度L^c是拟合修正后的亮度.

其中$(\Delta N_E)^2$常分为统计误差和系统误差两项,即

$$(\Delta N_E)^2 = (\Delta N_E)^2_{统计} + (\Delta N_E)^2_{系统} \tag{10.9}$$

第一项

$$(\Delta N_E)^2_{统计} = N_E \quad (据统计原理) \tag{10.10}$$

第二项

$$(\Delta N_E)^2_{系统} = (N_E \cdot \nu_E)^2 \tag{10.11}$$

式中ν_E 为相对系统误差,于是(10.8)式成为

$$\chi^2 = \frac{(N_E - N_T)^2}{N_E + N_E^2 \cdot \nu_E^2 + N_E^2 \cdot (\frac{\Delta L}{L})^2} \tag{10.12}$$

实际上N_T来源于理论计算,蕴含了实验感兴趣的待定信息,明确地表示出来应为

$$N_T = N_T(\vec{\xi}) \tag{10.13}$$

其中$\vec{\xi}$是参数矢量,包含了待定的拟合参数(本实验中为$\psi(2S)$衰变宽度Γ_h,$\Gamma_{\pi^+\pi^- J/\psi}$,$\Gamma_\mu$).对于多个过程和多个扫描点, 需要将各个$\chi^2$值求和.具体到我们分析的四个过程,除第一个过程用作积分亮度测量外,其余三个过程需要一并拟合,

$$F = \sum_{i=h,\mu,\pi\pi J/\psi} (\sum_{j=1}^{24} \chi^2_{ij}) \tag{10.14}$$

通过F的最小化可以获得待定的拟合参数的最佳估计值.

10.2 参数拟合

拟合将对式(10.1) ~ (10.4)描述的四类过程24个能量点的四组实验数据一并进行.由此得到$\psi(2S)$衰变到强子末态、$\mu^+\mu^-$末态、e^+e^-末态以及$\pi^+\pi^- J/\psi$末态的分宽度.$\psi(2S)$的总宽度假定为如下四个分宽度之和,即

$$\begin{gathered}\Gamma_t = \Gamma_h + \Gamma_\mu + \Gamma_e + \Gamma_\tau = \Gamma_h + \lambda\Gamma_\mu \quad (\lambda = 2.38847) \\ (轻子普适性原理: \Gamma_\mu = \Gamma_e = \Gamma_\tau/0.38847)\end{gathered} \tag{10.15}$$

在拟合过程中需要拟合的参数如下

参数	含　　义	单位
M	共振态(即$\psi(2S)$)的质量	GeV
Γ_t	$\psi(2S)$的衰变总宽度	keV
Γ_μ	$\psi(2S)$衰变到$\mu^+\mu^-$末态的分宽度	keV
$\Gamma_{\pi\pi J/\psi}$	$\psi(2S)$衰变到$\pi^+\pi^-J/\psi$末态的分宽度	keV
Δ	加速器能散	MeV
σ_{nr}	强子非共振截面(与R-值有关)	nb
η	表征$\mu^+\mu^-$末态QED过程实验拟合与理论估计的差异	$-$

我们将采用叠代方法根据过程(10.1)来确定亮度.这是结合$\psi(2S)$扫描实验的具体特点采用的既实用又合理而且颇具特色的方法.在$\psi(2S)$扫描的反应过程的范围内,e^+e^-末态主要来自QED过程.此外还存在$\psi(2S)$直接衰变到e^+e^-的过程(分支比[19]不足1%),以及两者的干涉效应.在$\psi(2S)$共振能区,$|\cos\theta|\leq 0.72$的范围内,$\psi(2S)\to e^+e^-$的共振截面约为QED截面的1/10.e^+e^-末态的QED截面在理论上可以进行相当精确的计算.如果将判选事例数N_e认为完全由QED过程产生,根据式(10.6)可以计算出离线亮度(表 10.1中的第三列数字),即

$$L=\frac{N_e}{\sigma_e(\theta)} \tag{10.16}$$

式中$\sigma_e(\theta)$指$|\cos\theta|\leq 0.72$范围内$e^+e^-\to e^+e^-$的截面.这样得出的亮度值在共振区会有较大的偏差.我们用拟合叠代的方法加以修正[27].具体过程如下:首先将e^+e^-末态事例视为全部由QED过程产生, 以QED过程的截面计算积分亮度及相应误差,代入式(10.12)得出其他过程的χ^2值,然后拟合得到$\psi(2S)$衰变总宽度Γ_t以及$\psi(2S)$衰变到$\mu^+\mu^-$ 末态的分支比$\mathcal{B}_\mu$.接下来利用轻子普适性原理,即$\mathcal{B}_e=\mathcal{B}_\mu$, 计算共振部分、QED部分与干涉部分的截面:

$$\sigma_e^{obs}(\theta)=\sigma_e^{\text{共振}}(\theta)+\sigma_e^{QED}(\theta)+\sigma_e^{\text{干涉}}(\theta) \tag{10.17}$$

式中$\sigma_e^\kappa(\theta)=\tilde{\sigma}_e^\kappa(\theta)\cdot A_e^\kappa(\theta)$($\kappa$=共振、QED、干涉),$\tilde{\sigma}_e^\kappa(\theta)$ 是理论截面,$A_e^\kappa(\theta)$是相应的实验接收度.然后利用计算得到的观测截面$\sigma_e^{obs}(\theta)$再次计算每个点的积分亮度,即

$$L=\frac{N_e}{\sigma_e^{obs}(\theta)} \tag{10.18}$$

重新拟合,得到新的Γ_t与$\mathcal{B}_\mu$. 这便完成了第一次叠代. 以此类推,叠代过程反复进行,直到每个能量点的积分亮度值在相继两次叠代中收敛为止. 图 10.1中,(a)为理论计算

的QED截面;(b)为经过叠代修正后的观测截面. 修正后的积分亮度值列在表 10.1的第四列中,在共振区积分亮度值修正的效果十分明显.

在拟合过程中我们要求相继两次叠代亮度值的差别小于1%.精细调节拟合初始化参数,可以将亮度值的差别缩小到0.1%.进一步调节还能再提高精度.可见叠代方法确定亮度的误差完全能够满足实验需要.

式(10.2) $\sim$ (10.4)描述的三类过程的拟合曲线及扫描数据点一并绘制在图

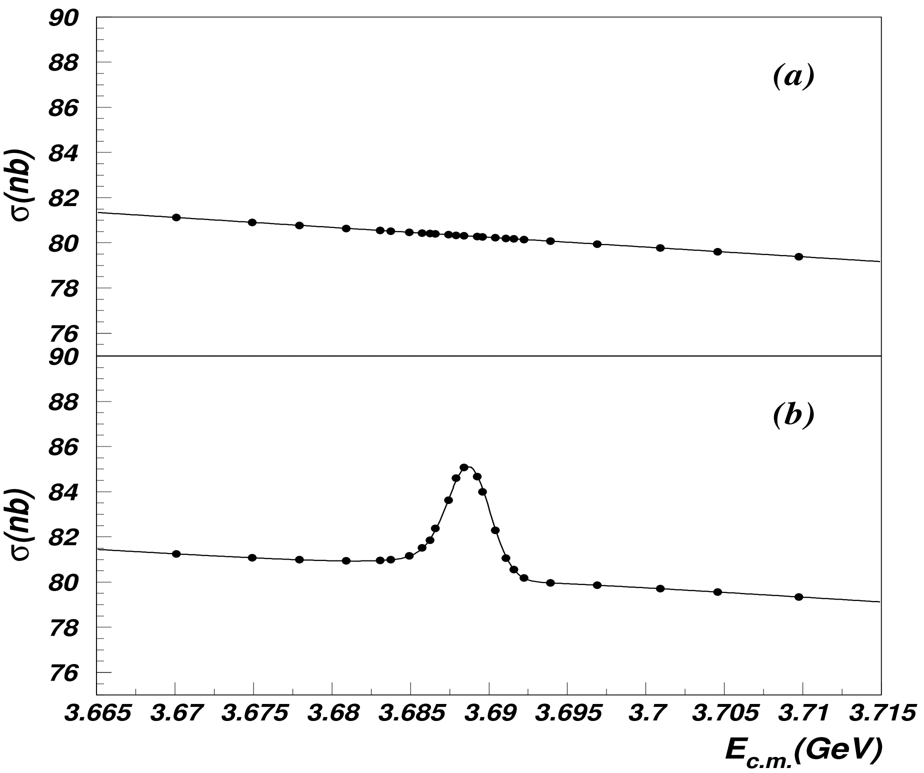

图 10.1 : (a) e^+e^-末态的QED截面; (b) 修正后e^+e^-末态的观测截面

10.2中.四组实验数据除去一组用作亮度测量, 其余三组实验数据每组24个能量点,扣除7个拟合参数,拟合自由度为65 $(24\times3-7=65)$.拟合程序给出的χ^2-值为61.6,与自由度之比接近1,表明拟合的质量良好.拟合得到的能散值为(1.305 ± 0.017) MeV 与预期值(~ 1.3) MeV非常接近.根据强子非共振截面计算得出的R-值为2.45 ± 0.10和R-值组已经发表的有关结果[53]接近.各种宽度的拟合值参见表 10.3的第一列.

如若假设[16]轻子通过中介光子与$\psi(2S)$耦合,则意味着存在$\psi(2S)\rightarrow\gamma\rightarrow$ 强子的衰变过程,其分支比为

$$\Gamma_{\gamma h}/\Gamma = R\Gamma_\mu/\Gamma = 0.0236\pm0.0019 \tag{10.19}$$

相应的衰变宽度为$\Gamma_{\gamma h} = 5.85 \pm 0.42$ keV.

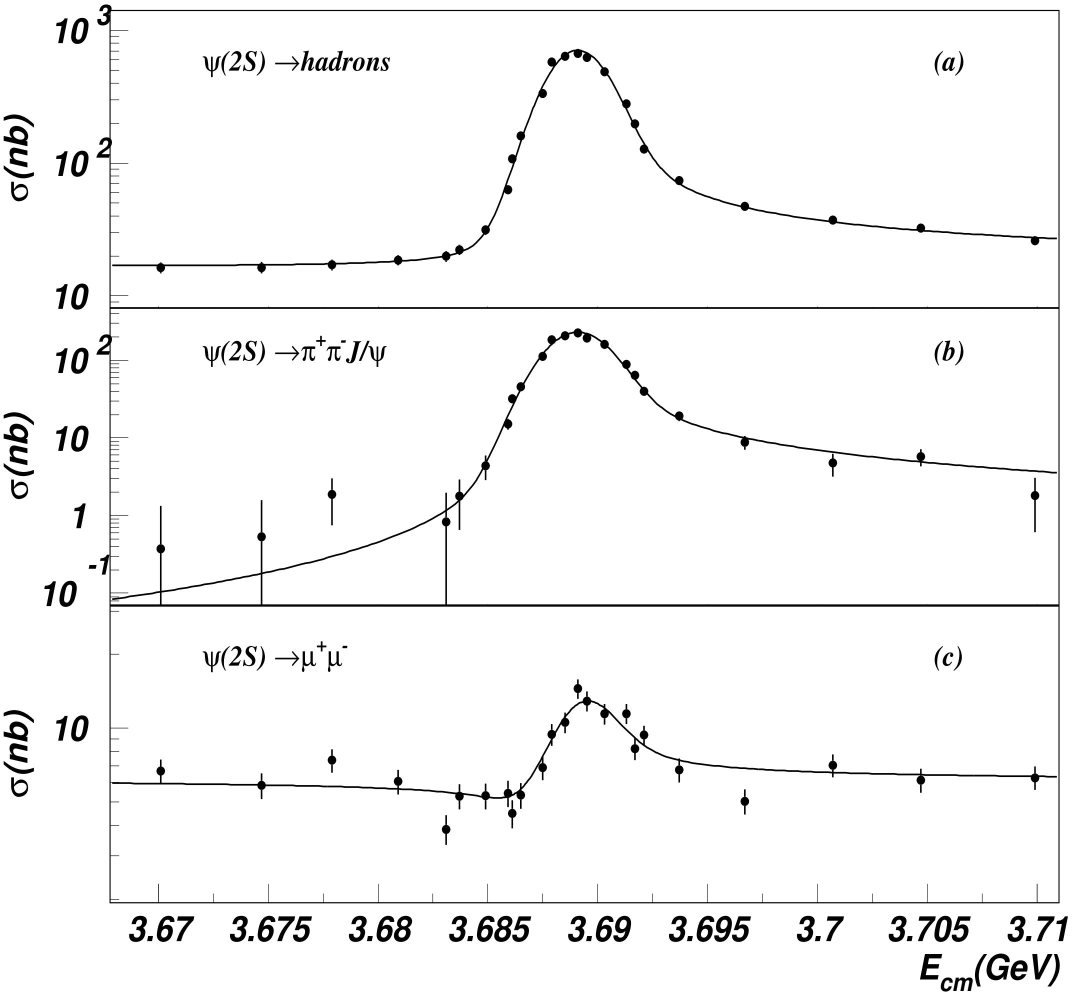

图 10.2 : $e^+e^- \to$ 强子的总截面(a)、$e^+e^- \to \pi^+\pi^- J/\psi$ 的积分截面(b)、$e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ 的积分截面(c) 在$\psi(2S)$附近能区随能量的变化

注: 图中数据点的误差包括统计误差和亮度测量误差,曲线为利用表 10.3第一列所示参数拟合的预期值

10.3 拟合参数误差

在实验观测截面的确定过程中,系统误差的来源主要有两个方面,一是事例判选误差, 二是事例模拟误差(有时也称之为接收度或探测效率的误差).前者可以在合理的

范围内变动事例判选条件,由变动前后实验观测截面的差别求出;后者可以调节反应过程的蒙特卡罗事例产生子的参数,或者利用同一模型的事例产生子,通过调节参数前后求得的探测效率的差别,或者利用不同模型的事例产生子求得的探测效率的差别求出.四种过程的误差研究结果参见表 10.2(详见第9章).

表中所列各数是均值,实际各能量点的测量数据误差围绕均值有相当大的起

表 10.2 : 系统误差分析及拟合结果

末态	e^+e^-	$\mu^+\mu^-$	$\pi^+\pi^- J/\psi$	hadrons
事例判选误差$\nu_{exp.}$	0.02240	0.05025	0.03397	0.0655/0.02137 †
事例模拟误差$\nu_{m.c.}$	0.00887	0.00635	0.00583	0.02428/0.02003 †
$\Delta\Gamma_i$ (keV)	$\star$	0.14	7.31	22.8
$\Delta\mathcal{B}_i(\%)$	$\star$	0.07	0.74	0.13

注:$\star$ 拟合中假设$\Gamma_e = \Gamma_\mu$及$\mathcal{B}_e$=$\mathcal{B}_\mu$

† 强子末态连续区与共振区事例数相差悬殊,故分别求出连续区/共振区的相应误差

伏.各能量点的数据误差和拟合参数$\psi(2S)$衰变宽度和分支比的误差之间的关系异常复杂. 事实上式(10.5)中的理论截面σ_T是行为十分奇特的一类积分, 因此χ^2是待定拟合参数的高度非线性函数,同时待拟合的参数的个数又很多. 在这种情况下,我们利用MINUIT程序包[52]拟合得出的参数误差仅当χ^2是待拟合参数的线性函数或近似于线性函数时才是准确可靠的.同时所测量的24个能量点的能量值实际上应有误差($\Delta E_{c.m.}$ = 0.10 MeV [30]),这一误差对拟合参数误差的影响在利用(10.12)式的χ^2进行求极小的拟合过程中很难估计进去. 为此我们采用了抽样方法确定拟合参数的误差.这种方法本质上是一种实验方法.具体地说, 将每一能量值看作是均值为观测值($E_{c.m.} = 2E_b$),标准偏差为$\Delta E_{c.m.}$ = 0.10 MeV 的高斯随机变量,对它进行高斯随机抽样.同时将每一过程每个能量点的事例数n_E 看作为一个随机变量,除$\psi(2S)\to\pi^+\pi^- J/\psi$过程中第4个能量点事例数为0,不参与拟合,第1、2、3、5个能量点的事例数较少,需要按泊松分布抽样外, 其余的观测事例数相当的多(见表10.1), 可以合理地认为它们服从高斯分布,因此按照高斯分布$G(N,\delta)$进行抽样,其中N是观测事例数的中心值,δ是相应的系统误差.此时(10.8)式变为

$$\chi^2_G = \frac{(n_E - N_T)^2}{n_E + n_E^2 \cdot (\frac{\Delta L}{L})^2} \tag{10.20}$$

其中

$$n_E = N_E \cdot (1 + \nu_E \cdot \zeta_N) \tag{10.21}$$

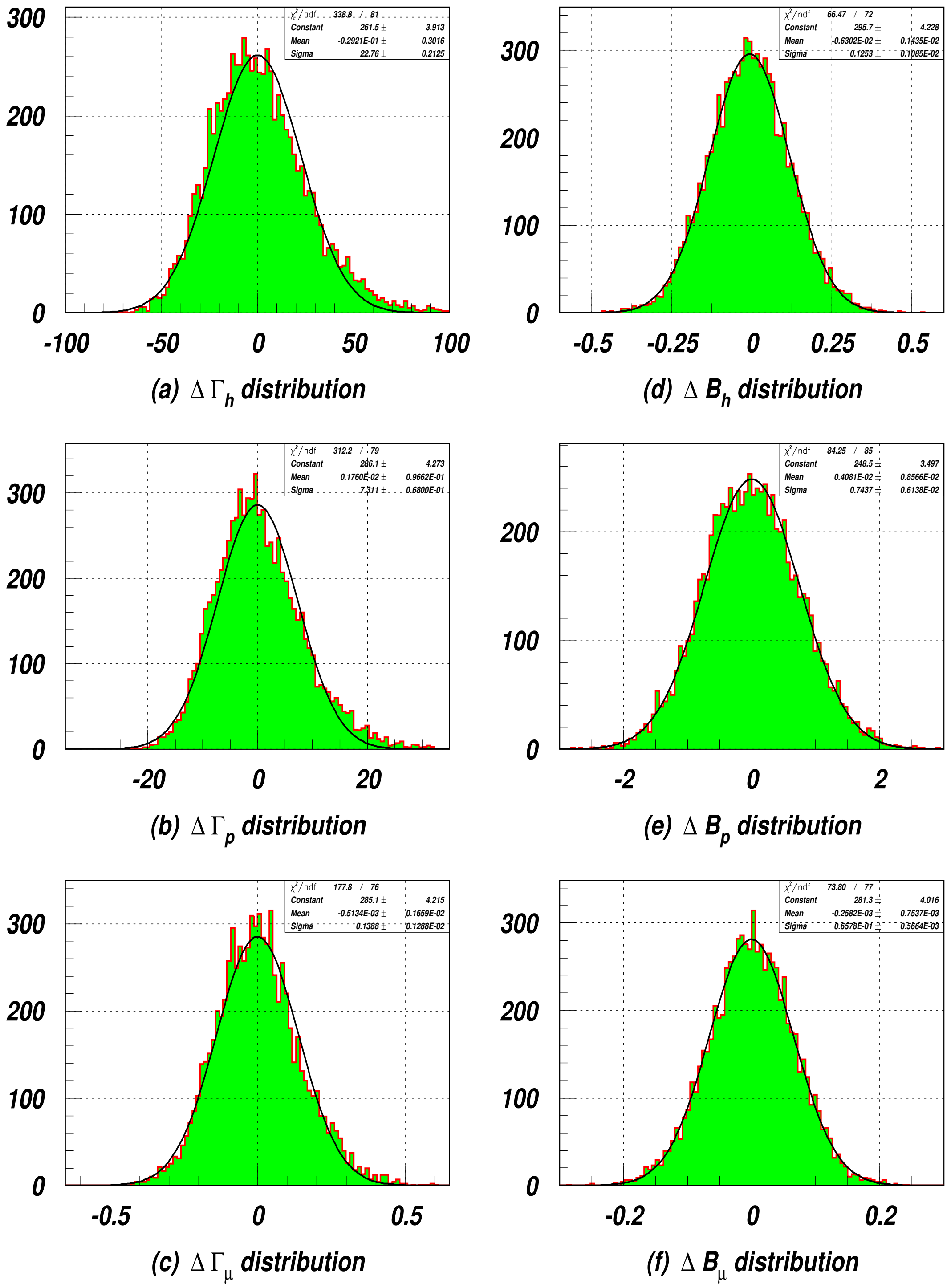

图 10.3: 抽样值的分布及拟合

注:图中$\Delta X = X_{\text{抽样值}} - X^0_{\text{拟合中心值}}$

式中ζ_N 是根据标准正态分布产生的随机数[1], $\nu_E = \sqrt{\nu_{exp.}^2 + \nu_{m.c.}^2}$是相对系统误差.一次抽样得到拟合参数的一组拟合值,大量的抽样得到多组拟合值.图 10.3给出各拟合参数的抽样值与拟合中心值之差的分布.由图可见,这些分布非常接近高斯分布,因此我们对于每个参数的多次拟合值按照高斯分布拟合,便可得到该参数的误差.相关结果参看表 10.2或表 10.3的第一列.

确定待拟合参数误差的抽样方法是结合$\psi(2S)$扫描实验的具体特点采用的既简单又精确可靠的方法.只要抽样次数足够多,对于抽样值的拟合带来的误差将足够小.我们作一万次抽样,拟合参数误差本身的误差已经小于1%.

表 10.3 : 结果与比较

Value	BES	Mark I	PDG2000	新世界平均值
$\Gamma_t(keV)$	$248.2 \pm 23.3(9.4\%)$	$228 \pm 56(24.6\%)$	$277 \pm 31(11.2\%)$	$259 \pm 19(7.2\%)$
$\Gamma_h(keV)$	$242.5 \pm 22.8(9.4\%)$	$224 \pm 56(25.0\%)$		
$\Gamma_{\pi\pi J/\psi}(keV)$	$80.56 \pm 7.31(9.1\%)$			
$\star\Gamma_\mu(keV)$	$2.39 \pm 0.14(5.9\%)$	$2.1 \pm 0.3(14.29\%)$	$2.12 \pm 0.18(8.5\%)$	$2.29 \pm 0.11(4.8\%)$
$\mathcal{B}_h(\%)$	$97.70 \pm 0.13(0.13\%)$	$98.1 \pm 0.3(0.31\%)$	$98.10 \pm 0.30(0.31\%)$	$97.8 \pm 0.12(0.12\%)$
$\mathcal{B}_{\pi\pi J/\psi}(\%)$	$32.46 \pm 0.74(2.3\%)$	$31 \pm 4(12.9\%)$	$31.0 \pm 2.8(9.0\%)$	$32.4 \pm 0.72(2.2\%)$
$\mathcal{B}_\mu(\%)$	$0.96 \pm 0.07(7.3\%)$	$0.93 \pm 0.16(17.2\%)$	$1.03 \pm 0.35(34.0\%)$	$0.96 \pm 0.07(7.1\%)$

注：括号中的数字表示相对误差；带$\star$的值是在$\Gamma_e = \Gamma_\mu$的假设下给出的.

10.4 讨论

表 10.3给出BES的测量结果.为了比较表中还罗列出Mark I实验组和PDG2000给出的数值.新世界平均值是根据PDG2000的数值与BES的测量值,并用他们相应的误差的倒数作为权重计算而来的.同时参考表1.3 可以看出BES的测量结果与Mark I实验组的结果接近(其测量值$\Gamma_t = 228keV$); 但与E760实验组的结果有所差异(其测量值$\Gamma_t = 306keV$).从相对误差的角度看,BES的测量结果是当今世界最佳值.根据新世界平均值,$\psi(2S)$的衰变总宽度从277 keV 变为259 keV,变化程度为6.9%; 相应的误差从31 keV 变为19 keV,改善程度为63.2%. 其余各衰变宽度的误差亦有不同程度的改善.除此之外,我们首次通过拟合方法直接测量了$\psi(2S)$衰变到$\pi^+\pi^- J/\psi$末态的衰

[1]对于$\psi(2S)\to\pi^+\pi^- J/\psi$过程中的第1、2、3、5个能量点按泊松分布抽样,此时有

$$n_E = n_P$$

式中n_P是以5、7、25、11为期望值的泊松随机数.

变宽度,由此计算出相应的分支比,使得该分支比的误差由9.0%变为2.2%, 改善程度达三倍之多.

在BES合作组的一篇文章中[25]给出了$\psi(2S)$衰变总宽度的数值, $\Gamma_t = (252 \pm 37)$keV.这一结果与本文的测量值$\Gamma_t = (248 \pm 23)$keV, 在误差范围内一致.

在另一篇文章中[54],BES合作组根据4.30GeV处收集到的数据,通过研究$e^+e^- \rightarrow \psi(2S)$道的反应,得到$\Gamma_e = (2.07 \pm 0.32)$keV, 与本文利用轻子普适性原理测得的数值$\Gamma_e = (2.39 \pm 0.14)$keV, 在误差范围内一致.

$\psi(2S)$扫描完全达到了预期的效果,拟合结果极大地提高了$\psi(2S)$共振参数的精度.为了改善其它共振参数的测量结果,同时充分利用$\psi(2S)$的扫描数据,我们计划进一步研究如下几个过程,希冀通过拟合给出良好的结果.

- ♣ $B(\psi(2S) \rightarrow J/\psi\ anything)$
- ♣ $B(\psi(2S) \rightarrow J/\psi\ neutrals)$
- ♣ $B(\psi(2S) \rightarrow J/\psi\, \pi^0\, \pi^0)$