北京谱仪R值测量中的初态辐射修正*

胡海明 祁向荣 黄光顺 赵政国

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 从R值测量实验的角度讨论了e^+e^-碰撞通过单光子湮灭产生强子截面的辐射修正, 分析了4种典型的计算方案. 在BEPC/BES上运行的$2-5$GeV能区, 不同方案给出的辐射修正因子$(1+\delta)$的差别大约是$1\sim 2\%$, 而每一方案计算中由于各种不确定因素带来的总误差约为$2\sim 2.5\%$.

关键词 强子事例 截面 辐射修正

1 引言

QED跑动耦合常数$\alpha(s)$和μ轻子的反常磁矩a_μ 及Higgs粒子质量拟合的最可几值是对标准模型进行精确检验的几个重要方面. 目前这些量的不确定性主要来自于1-5GeV能区R值的实验测量误差(高达15%). 在BEPC/BES上高精度测量R值是当前国际高能物理界所关注的实验.

R值定义为e^+e^-碰撞通过单光子湮灭产生强子与产生$\mu^+\mu^-$的最低阶截面之比

$$R=\frac{\sigma^\circ_{tot}(e^+e^-\to\gamma^*\to hadrons)}{\sigma^\circ(e^+e^-\to\gamma^*\to\mu^+\mu^-)}. \tag{1}$$

实验上R值是通过下式测量的

$$R=\frac{N^{obs}_{had}-N_{bg}}{\sigma^\circ_{\mu\mu}\cdot L\cdot\epsilon_{had}\cdot(1+\delta)}. \tag{2}$$

其中, N^{obs}_{had}是观测到的候选强子事例数, N_{bg}为剩余本底事例数，L是数据的积分亮度, ϵ_{had} 为强子事例的探测效率。$\sigma^\circ_{\mu\mu}$为理论上计算的$\mu^+\mu^-$的零阶截面

$$\sigma^\circ_{\mu\mu}=\frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \tag{3}$$

国家自然科学基金资助项目(19991480、19825116、19805009) 中国科学院重大项目(KJ95T-03)和百人计划基金资助

α是精细结构常数, s为质心系能量平方. $(1+\delta)$为辐射修正因子，表示高阶Feynman图过程的贡献, 见图1. 固于末态辐射修正涉及非微扰强子化计算, 只能得到模型相关的结果. 由于R 值测量的是单举强子过程总截面，需要对各种可能的强子末态求和，KLM定律证明,末态辐射修正强烈地相消[1][2][3]，对修正值的贡献小于1%，在目前的实验精度下可不予考虑.

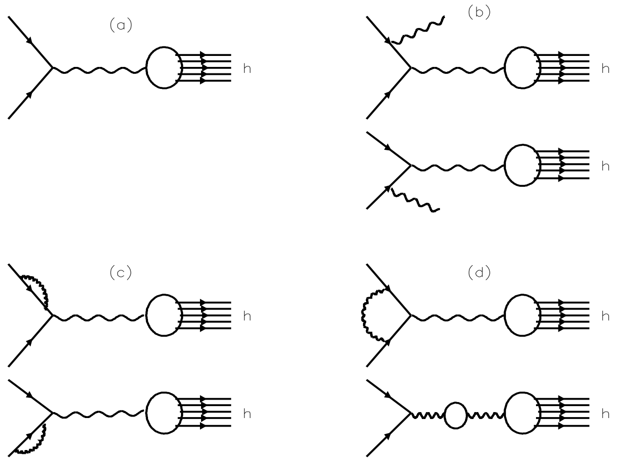

图 1： e^+e^-通过单光子湮灭产生强子的Feynman图. (a)最低阶强子产生过程; (b)初态韧致辐射; (c)初态e^+和e^-自能; (d)初态顶点修正及真空极化. 辐射修正因子δ即为图(b)、(c)及(d)所示的高阶过程的贡献.

辐射修正采用的是微扰论近似计算，它除了与计算的Feynman图的阶数$O(\alpha^n)$有关，还与所采用的重整化技术有关. 在已发表的文献中，不同作者给出的结果的表达式是有差别的. 本文中不打算从理论的角度去讨论这些结果，而只是从R值测量实验的应用方面去考查它们, 从辐射修正因子的数值上去比较不同方案之间的差异，结合物理上的分析，期望能选择其中一种适用的方案，对理论的系统误差给出一个估计.

2 辐射修正中与实验相关的几个问题

2.1 关于强子截面的一般性考虑

当我们选择了某种辐射修正计算方案(见下节), 在计算实验截面和辐射修正时, 需要着重分析的是相关过程的零阶截面.

R值实验测量e^+e^-湮灭为连续强子态和共振态过程的零阶单举截面. 强子产生的零阶截面$\sigma^\circ(s)$和总截面$\sigma^T(s)$ 可以表示为连续强子态截面和共振态截面之和, 即

$$\sigma^\circ(s) = \sigma^\circ_{con}(s) + \sigma^\circ_{res}(s), \tag{4}$$
$$\sigma^T(s) = \sigma^T_{con}(s) + \sigma^T_{res}(s). \tag{5}$$

其中σ°和σ^T的关系定义为

$$\sigma^T = \sigma^\circ(1+\delta). \tag{6}$$

零阶连续态强子产生截面$\sigma^{\circ}_{con}(s)$可用下式计算

$$\sigma^{\circ}_{con}(s) = \tilde{R}(s) \cdot \sigma^{\circ}_{\mu\mu}(s), \tag{7}$$

$\tilde{R}$是除去共振态贡献的R值. 从强子产生阈$\sqrt{s} = 2m_{\pi}$到1.8GeV能区, 计算中$\tilde{R}$取实验拟合值$\tilde{R}_{exp}$. 在大于1.8 GeV能区, 微扰QCD 的预言精度高于目前的实验精度[4], 且在误差范围内R_{QCD}与实验的$\tilde{R}_{exp}$相符, $\tilde{R}$ 取为理论预言值R_{QCD}.

BEPC能区存在丰富的共振态, 共振态截面的结构性会明显地体现在辐射修正因子中. 计算中考虑了19个共振态的贡献，如

$$\rho,\ \omega, \phi, J/\psi, \psi', \Upsilon, \Upsilon',\ \cdots\ \text{等},$$

其本征截面可以表示为相对论Breit-Wigner形式

$$\sigma^B_R(s) = \frac{12\pi\Gamma^{ee}\Gamma^{had}}{(s-M^2)^2 + (M\Gamma^{tot})^2}, \qquad (RL) \tag{8}$$

或非相对论形式

$$\sigma^B_R(s) = \frac{3\pi}{s} \cdot \frac{\Gamma^{ee}\Gamma^{had}}{(W-M)^2 + (\Gamma^{tot}/2)^2}, \qquad (NRL) \tag{9}$$

如果忽略共振态之间的干涉效应, 总零阶共振截面为

$$\sigma^{\circ}_{res}(s) = \sum_j \sigma^B_R(s). \tag{10}$$

如果实验测量点远离共振峰位，可以不关心共振态截面的细致结构, Breit-Wigner截面可以等效地简化为δ函数(除宽共振态ρ等外)，

$$\sigma^B_R(s) \;\; \Rightarrow \;\; 12\pi^2\frac{\Gamma^{ee}\Gamma^{had}}{\Gamma^{tot}M}\delta(s-M^2), \qquad (RL), \tag{11}$$

$$\sigma^B_R(s) \;\; \Rightarrow \;\; \frac{6\pi^2}{M^2}\frac{\Gamma^{e}\Gamma^{had}}{\Gamma^{tot}}\delta(W-M), \qquad (NRL). \tag{12}$$

对撞机的e^+e^-束流能量存在能散，其分布可表示为Gaussian形式

$$G(W-W') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta}\exp\left[-\frac{(W-W')^2}{2\Delta^2}\right], \tag{13}$$

其中，$W = \sqrt{s} = 2E$为储存环内e^+e^-标称质心系能量，$W' = \sqrt{s'}$为实际的质心能量，Δ 为W能散标准偏差. 对于BEPC，相对能散Δ/E与束流能量有关，约为$\Delta/E \propto 10^{-4}E$($E$以$GeV$为单位). 如果实验在共振峰附近取数，共振态的截面就需考虑能散分布的影响. 有效共振截面$\tilde{\sigma}_{res}$与Breit-Wigner 形式之间的关系可以用卷积积分表示

$$\tilde{\sigma}_{res}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dW'\sigma_{res}(s')G(W-W'). \tag{14}$$

上面卷积可用Monte Carlo方法计算

$$\tilde{\sigma}_{res}(s) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{res}(s_i^{'}), \tag{15}$$

其中$(s_1^{'}, s_2^{'}, \cdots, s_N^{'})$是满足能散分布$G(W-W')$的大随机样本.

实验上所测量到的强子产生截面$\sigma_{obs}(s)$与物理(理论)截面$\sigma(s)$之间的关系为

$$\sigma_{obs}^{\circ}(s) = \epsilon^{\circ}\cdot\sigma^{\circ}(s), \tag{16}$$
$$\sigma_{obs}^{T}(s) = \bar{\epsilon}\cdot\sigma^{T}(s), \tag{17}$$

其中，ϵ°和$\bar{\epsilon}$分别是没有和具有初态辐射时的强子事例探测效率，可用Monte Carlo方法估计，它包含了探测器对强子事例的在线触发、离线过滤、重建和判选效率.

2.2 宽共振态总宽度能量相关性

在BEPC能区, $\psi(3770)$, $\psi(4040)$, $\psi(4140)$ 和$\psi(4410)$可看作是宽共振态, 它们衰变为两体末态. 目前的实验没能确定其所有可能的衰变道. 如果Eichten[5]耦合道模型的预言是正确的, 则有(包括电荷共轭态)

$$\begin{aligned}
\psi(3770) &\Rightarrow D\bar{D};\\
\psi(4040) &\Rightarrow D\bar{D}, D^*\bar{D}^*, D\bar{D}^*, \bar{D}D^*, D_s\bar{D}_s;\\
\psi(4140) &\Rightarrow D\bar{D}, D^*\bar{D}^*, D\bar{D}^*, \bar{D}D^*, D_s\bar{D}_s, D_s\bar{D}_s^*, \bar{D}_sD^*;\\
\psi(4415) &\Rightarrow D\bar{D}, D^*\bar{D}^*, D\bar{D}^*, \bar{D}D^*, D_s\bar{D}_s, D_s\bar{D}_s^*, \bar{D}_sD^*, D_s^*\bar{D}_s^*.
\end{aligned}$$

由量子力学可知, 宽共振态的总衰变宽度与末态动量和角动量量子数L有关[6], 分析时需讨论所有可能的衰变分波.对所有可能的衰变道求和得到,

$$\Gamma^{tot}(s) = \sum_{ch}\Gamma_{ch}^{tot}(s). \tag{18}$$

对每一道还需对衰变分波求和

$$\Gamma_{ch}^{tot}(s) = \Gamma_R\sum_{L}\frac{z^{2L+1}}{B_L}, \tag{19}$$

其中, $z\equiv rp_{ch}$, $r(\simeq 2\sim 2.5$费米)为相互作用半径, 其数值对结果不敏感. 因子Γ_R由拟合实验数值得到. p_{ch}为末态粒子动量,

$$\begin{aligned}
p_{ch}^2 &= \lambda^2(s, M_{D_1}^2, M_{D_2}^2)/4s\\
&= \frac{[s-(M_{D_1}+M_{D_2})^2][s-(M_{D_1}-M_{D_2})^2]}{4s}.
\end{aligned} \tag{20}$$

能量相关的较低分波的函数B_L为[7]

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1,\\
B_1 &= 1+z^2,\\
B_2 &= 9+3z^2+z^4,\\
B_3 &= 225+45z^2+6z^4+z^6.
\end{aligned} \tag{21}$$

衰变分波正比于p_{ch}^{2L+1}, 这一效应称为离心位垒. 当衰变动量不大时(如在产生阈附近), 衰变分波的宽度随L的增加而迅速减小.当某一衰变道可以通过几种分波进行时, 一般以低分波贡献为主.

2.3 共振态相干性

在ψ族共振区, 连续强子态与ψ衰变道没有相同的末态, 它们之间没有相干性. ψ族的不同宽共振态的峰位相互靠近, 截面有明显的重迭, 而且它们有相同的衰变末态, 因而存在干涉效应. ψ族粒子在其共振区是近阈产生, 相对论效应很弱, 可用非相对论性共振态Breit-Wigner振幅

$$T_R = \frac{\pm\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma^{ee}\Gamma^{had}}}{W - M + i\Gamma^{tot}/2}, \qquad (NRL). \tag{22}$$

在相对论量子力学中, 还应考虑反粒子(相当于具有负能级$-W$态)的贡献, (22)式很容易推广到相对论性振幅

$$T_R = \frac{\pm M\sqrt{\Gamma^{e}\Gamma^{had}}}{s - M^2 + iM\Gamma^{tot}}, \qquad (RL). \tag{23}$$

ψ族共振区的共振态总截面为

$$\sigma^{\circ}_{res} = \frac{4\pi(2J+1)}{s}|\sum_R T_R|^2. \tag{24}$$

但如果两共振态的峰位差$|M_{R_1} - M_{R_2}|$远大于它们的总宽度之和$\Gamma^{tot}_{R_1} + \Gamma^{tot}_{R_2}$, 它们的干涉效应可以忽略. 图2表示$\psi(4040)$, $\psi(4140)$和$\psi(4415)$三个共振态无干涉R_{DD}值, 干涉项贡献及包括干涉效应的R_{DD}值随能量的变换关系. 可见干涉效应是明显的, 而且使得零阶截面的呈现不对称性.

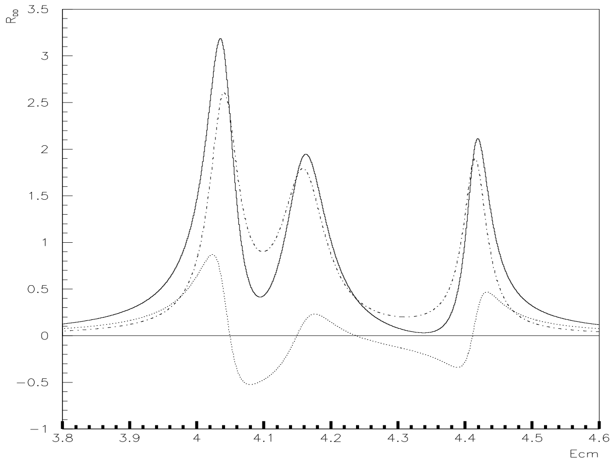

图 2： 三个ψ族宽共振态的无干涉(点划线), 干涉项(虚线) 及包括干涉的R_{DD}值(实线)随能量的变化关系. 共振参数取自粒子数据表(PDG).

2.4 软光子问题

初态辐射修正可分为实光子和虚光子辐射两类. 实光子辐射使得产生末态强子的有效能量$\sqrt{s'}$不等于e^+e^-束流的质心能量$\sqrt{s}$. 当初态e^+或e^-辐射能量为$k \equiv E_\gamma/E$的实光子时

$$s' = s(1-k). \tag{25}$$

量子电动力学(QED)理论已证明，对于至某一确定阶$O(\alpha^n)$ 的微扰计算，当考虑了所有相关的Feynman图，QED是可重整的. 圈图的紫外发散可被消除，但虚光子和实光子辐射部分是红外发散的. 实光子辐射的发散来自于能量趋于零的软光子，而虚光子辐射的发散则来自光子零质量和零能量. 解决这一问题的方法之一是赋予光子很小的质量λ，以保证理论的Lorentz不变性及消除红外发散项，同时选取某任意小的软光子能标k_0划分软辐射和硬辐射的相空间. 在实验上，能量趋于零的软光子是不可观测的. 在微扰论中, 虚光子和实软光子的辐射修正是因子化的, 而硬辐射截面则没有因子化性质. 如果用σ^V和σ^{SB}分别对应于虚辐射和软辐射过程的截面，则有[8]

$$\begin{aligned} \sigma^{VSB} &\equiv \sigma_\circ + \sigma^V + \sigma^{SB} = \sigma^\circ(1+\delta^V+\delta^{SB}), & (26)\\ \sigma^H &\equiv \sigma^{HB}, & (27)\end{aligned}$$

在σ^{VSB}中含有λ的项都相互抵消了. 在单光子辐射近似下, 硬辐射修正的截面σ^H可由光子谱分布[9]

$$\frac{\partial\sigma^{HB}}{\partial k} = \frac{\beta}{k}(1-k+\frac{1}{2}k^2)\sigma^\circ(s'), \tag{28}$$

积分得到

$$\sigma^H = \int_{k_0}^{k_m} dk \frac{\partial\sigma^{HB}}{\partial k}. \tag{29}$$

其中,

$$\beta = \frac{2\alpha}{\pi}[\ln\frac{s}{m_e^2} - 1], \tag{30}$$

它出现于每个韧致辐射的顶角上, 可称为韧致辐射有效耦合常数. 积分上限k_m可以由有效质心能量应大于强子产生阈确定

$$k_m = 1 - 4m_\pi^2/s. \tag{31}$$

显然σ^{VSB}和σ^H都是有限的，但两者仍与人为引入的任意数k_0有关. 因而，对于确定阶的微扰QCD的计算结果受所谓k_0问题的困扰。实际计算中k_0的合理取值范围可从如下两方面的要求来考虑: (1)上限: 实验上只能测量到能量$k > k_0$的实光子，而能量$k < k_0$的实光子辐射与零阶过程及虚过程是不能区分的，这意味着k_0 至少应小于探测器对光子能量的分辨本领; (2)下限:由于当$k_0 \to 0$时有$\sigma^{SB} \to -\infty$, 因此k_0的选取应保证不违背物理要求，即$\sigma^{SB} > 0$.

从实验的角度，可以把理论上划分软光子和硬光子任意性与它们是否能被探测器所观测相联系. BES所能探测到的光子最小能量为$50 \sim 80$ MeV, 相当于选取$0.01 < k_0 < 0.05$, k_0仍然可在一定的范围内变化. 在用Monte Carlo方法估计强子效率时, 事例产生按照(54)式和(27)式划分. 对应于σ^{VSB}的事例被当作无辐射事例, 而对应于σ^H的事例的

光子辐射按谱分布(28)式产生. k_0的任意性造成强子效率及有效辐射修正因子的不确定性.

微扰QED的计算表明，对于软光子($k < k_0$)辐射，高阶图的贡献是很重要的. 因此，更精确的计算应包括任意数目的软光子辐射图的贡献，多软光子截面具有领头行为[10]

$$\begin{aligned}\sigma^{S_1 S_2 S_3 \cdots} &= \sigma^\circ \times [1 + \beta \ln k_0 + \frac{1}{2}\beta^2 \ln^2 k_0 + \frac{1}{3!}\beta^3 \ln^3 k_0 + \cdots] \\ &= \sigma^\circ \times exp(\beta \ln k_0) = \sigma_0 \times k_0^\beta,\end{aligned} \tag{32}$$

其结果是软光子截面具有指数化性质，这相当于在单光子韧致辐射谱分布$\partial\sigma^{HB}/\partial k$中直接引入因子$k^\beta$而成为

$$\frac{\partial \sigma}{\partial k} = k^\beta \cdot \frac{\partial \sigma^{HB}}{\partial k}, \tag{33}$$

它的积分在整个区间$[0,1]$是收敛的，这就消除了理论上的k_0问题.

2.5 真空极化

真空极化的贡献使光子传播子变为

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \Rightarrow \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2[1-\Pi(q^2)]}, \tag{34}$$

计算至α的领头阶, 经重整化后相当于零阶截面改变为

$$\sigma^\circ(s) \Rightarrow \frac{\sigma^\circ(s)}{|1-\hat{\Pi}_2(s)|^2}. \tag{35}$$

其中$\hat{\Pi}_2(s) \equiv \Pi_2(s) - \Pi_2(0)$ 是有限的, 其实部可用色散关系表示

$$Re\hat{\Pi}_2(s) = \frac{s}{4\pi^2\alpha} \sum_X \int_{s_{th}}^{\infty} \frac{\sigma_{ee\to X}(s')ds'}{s - s' - i\epsilon}. \tag{36}$$

对X求和是因为真空极化费米子子圈可以是$X = e^+e^-, \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-, q\bar{q}$对. 当$\hat{\Pi}_2(s)$ 是一个小量, 可取展开式

$$\frac{1}{|1-\hat{\Pi}_2(s)|^2} = 1 + 2Re\hat{\Pi}_2(s) + \cdots. \tag{37}$$

因此真空极化因子表示为各相应修正项之和

$$\delta_{vac} = -2Re\hat{\Pi}_2(s) = \delta_{vac}^{e^+e^-} + \delta_{vac}^{\mu^+\mu^-} + \delta_{vac}^{\tau^+\tau^-} + \delta_{vac}^{q\bar{q}} \tag{38}$$

每项的意义用其上下标表示. 对于轻子圈，色散积分可以解析地求出($x = 4m_l^2/s$)，

$$\delta_{vac}^{l^+l^-}(s) = \frac{2\alpha}{\pi} f(x), \tag{39}$$

其中,

$$f(x)=-\frac{5}{9}-\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{1-x}(2+x)}{6}\log\left[\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right],\quad (x\leq 1),\tag{40}$$

$$f(x)=-\frac{5}{9}-\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x-1}(2+x)}{3}\tan^{-1}\frac{1}{1-\sqrt{x-1}},\quad (x>1).\tag{41}$$

对夸克圈的计算可有两种方法:

(1)把$q\bar{q}$等效为强子态　相应的修正因子可以写成连续强子态与共振态贡献之和

$$\delta_{vac}^{q\bar{q}}\equiv\delta_{vac}^{had}(s)=\delta_{vac}^{res}(s)+\delta_{vac}^{con}(s),\tag{42}$$

其中,

$$\delta_{vac}^{res}(s)=\sum_j\frac{6\Gamma_j^{ee}}{\alpha M_j}\cdot\frac{s\left[s-M_j^2+(\Gamma_j^{tot})^2\right]}{\left(s-M_j^2\right)^2+\left(M_j\Gamma_j^{tot}\right)^2}\tag{43}$$

$$\delta_{vac}^{con}(s)=-\frac{2\alpha s}{3\pi}\int_{4m_\pi^2}^{\infty}\frac{1}{s'-s}\left[\frac{\tilde{R}(s')}{s'}-\frac{\tilde{R}(s)}{s}\right]ds'.\tag{44}$$

(2)把$q\bar{q}$等效于准自由费米子对　计算中取组分夸克质量其夸克电荷,最后乘上强相互作用修正因子1.2和色因子3,

$$\delta_{vac}^{q\bar{q}}=1.2\cdot 3\cdot\frac{2\alpha}{\pi}[\frac{4}{9}f(x_u)+\frac{1}{9}f(x_d)+\frac{4}{9}f(x_c)+\frac{1}{9}f(x_b)],\quad x_q=4m_q^2/s.\tag{45}$$

显然,方法(1)包含了共振态的贡献,而方法(2)则没有共振效应.数值计算表明,用上述两种方法得到的结果在非共振区很接近.在共振区$\delta_{vac}^{res}(s)$对作为初始输入量的共振参数$(M,\Gamma^{ee},\Gamma^{tot})$的数值很敏感.因此引用其它实验给出的数值误差会作为系统误差引入.我们将采用多次拟合迭代的办法来减小其它实验值误差的影响.

轻子宽度表示共振态衰变为轻子对的分宽度.需要指出的是,共振态粒子可直接衰变为强子,而衰变为轻子对l^+l^-则需通过(虚)光子耦合,因而存在真空极化效应.在理论分析中常用最低阶的轻子宽度(即Breit-Wigner公式中的Γ^{ll}).而实验中所测量的轻子分宽度Γ_{exp}^{ll}的数值则包含了真空极化效应[3].它们之间的关系为

$$\Gamma_{exp}^{ll}=\frac{\Gamma^{ll}}{|1-\hat{\Pi}_2(s)|^2}.\tag{46}$$

强子分宽度没有这样的关系,即$\Gamma_{exp}^{had}=\Gamma^{had}$.因此,共振参数用实验值时,共振态的辐射修正中没有真空极化项.(54)可以展开为

$$\sigma^{VSB}=\sigma_{con}^{\circ}(1+\delta_{vac}+\delta_{vert})+\sigma_{res}^{\circ}(1+\delta_{vert}).\tag{47}$$

3　辐射修正的计算方案

这里所列举的是辐射修正的理论表达式,其中所用的符号的含义与上节相同.辐射修正因子可由下式定义得到

$$1+\delta\equiv\sigma^T(s)/\sigma^{\circ}(s).\tag{48}$$

3.1 方案I

在实验上广泛采用的处理初态辐射的方案是由G. Bonneau和F. Martin[8]引入的，它能统一地给出e^+e^- 对撞通过湮灭道产生任意末态辐射修正的一般公式,

$$\sigma^T(s) = \sigma^\circ(s)[1 + \frac{2\alpha}{\pi}(\frac{\pi^2}{6} - \frac{17}{36}) + \beta(\frac{13}{12} + \ln k_0)] + \sigma^H(s). \tag{49}$$

特定过程(反应道)的具体性质由相应的零阶截面$\sigma^\circ(s)$ 体现. 硬光子辐射截面σ^H的计算参见方程(29), 其余部分对应由于真空极化和质量重整化顶点形状因子的辐射修正及韧致辐射中与k无关的部分及软光子辐射的贡献. e^+和e^-自能图在重整化后无贡献. (51)式中真空极化修正项直接从Feynman积分技巧求出，但只计算了e^+e^-圈图，而忽略了$\mu^+\mu^-$，$\tau^+\tau^-$和$q\bar{q}$的贡献. 在BEPC能区，$\mu^+\mu^-$，$\tau^+\tau^-$圈图贡献比e^+e^-小得多，但$q\bar{q}$圈的贡献却不总是很小(例如在共振峰附近).

式(51)中的软光子辐射项

$$\beta \cdot ln\, k_0 = -\beta \int_{k_0}^{1} \frac{dk}{k}, \tag{50}$$

应用(33)式, 即可得到包括高阶辐射在内的表达式

$$\sigma^T(s) = \sigma^\circ(s)[1 + \frac{2\alpha}{\pi}(\frac{\pi^2}{6} - \frac{17}{36}) + \frac{13}{12}\beta + \delta_\gamma], \tag{51}$$

其中

$$\delta_\gamma = \beta \int_0^{k_m} \frac{dk}{k} k^\beta [(1 - k + \frac{k^2}{2})\frac{\sigma^\circ(s')}{\sigma^\circ(s)} - 1] + k_m^\beta - 1 \tag{52}$$

是韧致辐射修正因子. 显然, 对k的积分范围可以是$[0, k_m]$.

3.2 方案II

这种方案是由F.A. Berends和R.Kleiss[9]给出的，已为大多数有关的Monte Carlo产生器所采用.计算到$O(\alpha^3)$阶的强子产生截面表示成两项之和

$$\sigma^T = \sigma^{VSB} + \sigma^H, \tag{53}$$

其具体表达式为

$$\sigma^{VSB} = \sigma^\circ(s) \cdot [1 + \beta\ \ln(k_0) + \delta_{AR}], \tag{54}$$

含$\beta\ \ln\ k_0$的项来自软光子辐射的贡献. δ_{AR}为虚过程(圈图)修正, 可以表示为[2]

$$\delta_{AR} = \delta_{vert} + \delta_{vac}^{ee} + \delta_{vac}^{\mu\mu} + \delta_{vac}^{\tau\tau} + \delta_{vac}^{had}, \tag{55}$$

其中，顶点修正

$$\delta_{vert} = \frac{2\alpha}{\pi}(\frac{3}{4}\log\frac{s}{m_e^2} - 1 + \frac{\pi^2}{6}). \tag{56}$$

硬辐射截面σ^H与方程(29)相同.

如果对(54)式中的软辐射项$\beta \ln k_0$ 作与方案I相同的处理, 则得到Crystal Ball实验组在一系列实验的辐射修正计算中所用的表达式[12]

$$\sigma^T(s) = \sigma^\circ(s)(1 + \delta_{vert} + \delta_{vac} + \delta_\gamma), \tag{57}$$

其中, δ_γ与方案I相同, $\delta_{vert} + \delta_{vac}$即方案II中的$\delta_{AR}$.

3.3 方案III

从量子场论的观点, 初态e^+和e^-总是伴随光子的发射和吸收过程(主要沿小角度方向), 即周围分布着实和虚光子云. 如果忽略横向动量的影响, 可用e^+和e^-分布函数$D_{e^+}(x_1, s)$、$D_{e^-}(x_2, s)$描写e^+和e^-辐射光子后剩余纵动量分数为x_1和x_2的概率分布.

根据QCD计算的经验，e^+e^-通过单光子湮灭产生某类末态可以看作与Drell-Yan过程相类似. 应用KLM定理关于质量和红外发散因子化的一般性结论, 总截面可表示为零级截面与电子纵向动量分布函数的卷积. 这种方案对于任意末态(例如$e^+e^- \Rightarrow \mu^+\mu^-, \tau^+\tau^-$, 强子)都是适用的. 在领头对数近似下，过程的总截面表示为[13][14][15]

$$\sigma^T(s) = \int \int_{x_1+x_2>2} dx_1 dx_2 D_{e^+}(x_1, s) D_{e^-}(x_2, s) \tilde{\sigma}^\circ(x_1 x_2 s), \tag{58}$$

其中，

$$\tilde{\sigma}^\circ(s) = \frac{\sigma^\circ(s)}{|1 - \hat{\Pi}_2(s)|^2}, \tag{59}$$

$\sigma_0(s)$为过程的零级截面. 引入变量$x = 1 - x_1 x_2$, $\sigma^T(s)$可以改写为

$$\sigma^T(s) = \int_0^{x_{max}} dx \frac{\sigma^\circ(s')}{|1 - \hat{\Pi}_2(s')|^2} F(x, s), \tag{60}$$

$F(x, s)$称之为辐射因子，它包括初始顶点，多光子辐射及对转化$\gamma \to e^+e^-$的修正. 公式中的变量x一般并不代表光子所带走的能量分数, 只当x很小时两者才近似相等, 而当$x \sim 1$时两者在α^2修正上是偏离的.

3.4 有效辐射修正因子

前述中$(1 + \delta)$是辐射修正因子的理论值, 而实验中观测到的有效值$(1 + \delta_{obs})$与强子探测效率有关. 因此, 可把辐射修正与探测效率的乘积一起考虑. 实验测量的强子截面为

$$\sigma^T_{obs} = \frac{N_{had}}{L}. \tag{61}$$

可以设想由以下两种不同的步骤得到R值:

$$\sigma^T = \frac{\sigma^T_{obs}}{\bar{\epsilon}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{N_{had}}{\sigma^\circ_{\mu\mu} L \bar{\epsilon} \cdot (1 + \delta)}, \tag{62}$$

或者

$$\sigma^\circ_{obs}=\frac{\sigma^T_{obs}}{1+\delta_{obs}}\quad\Rightarrow\quad R=\frac{N_{had}}{\sigma^\circ_{\mu\mu}L\epsilon(0)(1+\delta_{obs})}.\tag{63}$$

比较两式应有

$$\bar\epsilon(1+\delta)\approx\epsilon(0)(1+\delta_{obs}).\tag{64}$$

但事实上, 数值计算发现两者在误差范围内并不相等. 原因在于实辐射修正项在实验上受探测效率的影响, 与之相关的强子零阶截面应当取为相应的零阶观测截面, 即

$$\sigma^\circ(s)\Rightarrow\sigma^\circ_{obs}(s)\equiv\epsilon(0)\sigma^\circ(s),\quad \sigma^\circ(s')\Rightarrow\sigma^\circ_{obs}(s)\equiv\epsilon(k)\sigma^\circ(s').\tag{65}$$

但既使考虑了实验因素, 与虚过程修正相关的零阶截面也不需要乘以效率. Monte Carlo给出的虚辐射过程效率等同于无(软实)辐射效率, 一般有$\epsilon(0)>\bar\epsilon$, $\epsilon(k)$. 表达式$\bar\epsilon(1+\delta)$意味着虚过程也具有效率$\bar\epsilon$, 这显然是不合理的. 应该把$\bar\epsilon$的实辐射效应归入到δ中的韧致辐射项$\delta_\gamma\Rightarrow\delta_{\gamma obs}$, 因而$R$值的实验公式中的效率辐射因子乘积应取为$\epsilon(0)(1+\delta_{obs})$. 按照(65)式的替换, 即可把方案I和II的理论截面变成相应的观测截面, 可由

$$\frac{\sigma^T_{obs}(s)}{\sigma^\circ_{obs}(s)}\equiv1+\delta_{obs}\tag{66}$$

得到有效辐射修正因子. 方案III中的变量x不是辐射光子带走的能量分数, 现有的Monte Carlo中没有与之对应的模拟量, 而且实和虚辐射修正都包含在因子$F(x,s)/|1-\hat\Pi_2|^2$中, 不能象方案I和II那样划分为各种修正项之和. 因此, 方案III只能给出理论值$(1+\delta)$, 而不能得到实验上有效的观测值$(1+\delta_{obs})$.

3.5 关于末态辐射修正

末态辐射修正并不改变系统的质心能量, 只以一个因子的形式影响截面的大小. 对所有强子末态求和抵消了类似于初态辐射修正中起主要贡献的对数项, 剩下一个$(1+3\alpha Q^2/\pi^2)$的因子[3], 这是一个非常接近1的量, 可以完全忽略强子末态的辐射修正. 另一方面, 现在对强子结构的了解还很粗略, 当前的R值测量中没有必要追求其电磁修正.

4 数值结果和几点讨论

本文从实验的角度分析了R值测量中的辐射修正问题和四种被广泛采用的计算方案. 辐射修正是在零阶截面的基础上所作的"微小"修正. 结合实验分析正确地给出零阶截面是非常重要的. 在BEPC能区, 存在复杂的共振态结构, 共振态的相干性和宽$\Gamma^{tot}(s)$对能量的依赖关系等因素质通过零阶截面的表达式体现为辐射修正因子随能量的变化. 经强子事例选择得到的样本包含各种高阶过程产生的强子. 与零阶过程相比, 辐射效应使得总截面的结构性变弱, 也就是说, 对总截面作辐射修正将使所观测到的共振结构更为明显(即峰增高, 两峰间的谷变深). 以往的实验给出的共振参数存在较大的不确定性, 需要用BES的数据作带辐射修正的全局迭代拟合(而不是象连续区可作逐点计算)得到BES实验的共振参数$(M,\Gamma^e,\Gamma^{tot})$, 用于计算辐射修正因子.

如果只考虑连续强子态, 各种辐射修正方案给出非常接近的结果(相对差别约为1%), 它们的差别主要在共振峰附近. J/ψ和$\psi(3686)$是狭窄共振态, $\psi(3770)$, $\psi(4040)$, $\psi(4140)$和$\psi(4410)$ 可看作是宽共振态. 多软光子辐射效应对狭窄共振态J/ψ和$\psi(3686)$截面的贡献是非常重要的, 应采用指数化的韧致辐射形式, 还可采用文献[11]的方案. 软光子辐射对宽共振态截面的影响很小, 可以忽略. 方案I和II在原文献中的形式只包括单光子辐射, 在较高的精度上可用于计算连续区和含三个宽共振态能区的辐射修正, 但应考虑到宽共振态的总宽度不是与能量无关的常数. 方案I和III对$\psi(3770)$截面计算的数值结果非常接近, 见图3. 图和图分别给出了用前面所讨论的四种方案计算的辐射修正因子及各种方案之间的差别并以此作为理论的系统误差的估计.

如果把上述三种辐射修正方案之间的差别作为理论的系统误差的估计, 则在采用相同的$\tilde{R}(s)$和σ°_{res} 的条件下, $(1+\delta)$的理论系统误差在连续区约是1%, 而共振峰附近约为$2\sim 2.5\%$. 对于每一种具体方案, 从几个方面估计了$(1+\delta)$和$\sigma^T(s)$ 的理论误差: (1)输入$\tilde{R}(s)$值的实验误差或QCD理论预言R_{QCD}的不确定性; (2)输入共振参数的误差; (3)某些辐射修正项的理论近似误差;(4)Monte Carlo估计的强子效率$\epsilon(k)$的误差; (5)数值积分的误差. 输入共振参数$(M,\Gamma^{ee},\Gamma^{tot})$的误差会影响共振峰附近的辐射修正因子. 这五方面的误差约为2%. 因此, 由各种误差因素带来的总误差约为$2\sim 2.5\%$. 图表示各种辐射修正方案的$(1+\delta)$值和它们差值. 在1998年R值测量的能量点远离共振态, 采用了方案I计算辐射修正[16]. 从图3的比较来看, 用方案I来计算象$\psi(3770)$ 这样不是很宽的共振态也是一个较好的近似.

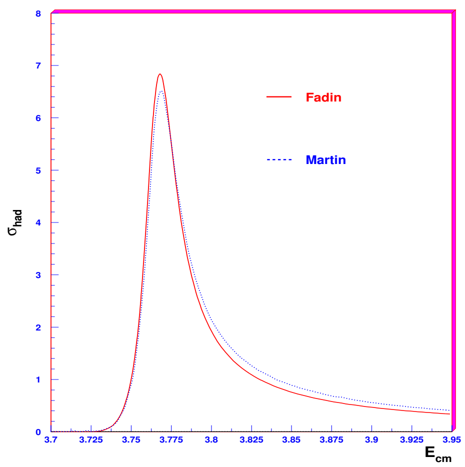

图 3： 用方案I(虚线)和方案IV(实线)计算的$\psi(3770)$的截面, 单位是nb.

作者感谢吴济民、张新民、黄涛、杜东生、郁宏、王健雄、王平、薛生田、张达华、王至勇及陈光培等同志对本工作提出的有益的意见和建议.

参考文献(References)

参考资料

[1] Lee T D, Phys. Rev., 1964, **133**:1549
Kinoshita T, J. Math. Maths., 1962, **3**:650

[2] Tsai Y S SLAC-PUB-3120, May 1983, (T/E)

[3] Alexander J etal. Phys. Rev., 1988, **D37**:56-70
Alexander J etal. Nucl. Phys., 1989, **B320**:45-60

[4] Davier M, Höcker A, Phys. Lett., 1998, **B435**:427-440
Davier M, hep-ex/9912044

[5] Eichten E et al. Phys. Rev., 1980, **D21**:203-233

[6] Gao Chong Shou, Lectures on Particle Physics and Nuclear Physics. Beijing: Higher Education Press, 1990. 101
(高崇寿, 曾谨言. 粒子物理与核物理讲座. 北京: 高等教育出版社, 1990. 101)

[7] Blatt J M, Weisskopf V F, Theoretical Nuclear Physics, Wiley, New York, 1952: 361

[8] Bonneau G, Martin F, Nucl. Phys., 1971, **B27**:381-397

[9] Berends F A, Kleiss R, 1981, **B178**:141-150

[10] Peskin M E, Schroeder D V, An Introduction to Quantum Field Theory, Addison-Wesley Publishing Company, 1995: 202-208

[11] Jackson J D, Scharce D L, Nuc. Inst. Methods, 1975, **128**:13-23

[12] Edwards C et al. SLAC-PUB-5160, 1990, (T/E)

[13] Kureav E A, Fadin V S, Sov. Nucl. Phys., 1985 **41**:466-472

[14] Wu JiMin, High Energy Phys and Nuclear Phys. (in Chinese), 1992, **16**:518-526
(吴济民，高能物理与核物理，1992, **16**:518-526)

[15] Chen FengZhi etal. High Energy Phys and Nuclear Phys. (in Chinese), 1990, **14**:585-594
(陈凤至等，高能物理与核物理，1990, **14**:585-594)

[16] Bai J Z etal. Phys. ReV. Lett., 2000, **84**:594-597

Initial State Radiative Correction in R Measurement at BES

Hu Haiming, Qi Xiangrong, Huang Guangshun, Zhao Zhengguo

(Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, P.R.China)

Abstract Four typical schemes of the initial state radiative correction in e^+e^- collision through single photon annihilation were studied, and the numerical results were calculated in the energy region $0.3 - 10$ GeV. For the energy points we scanned with BESII at the energies between $2 - 5$ GeV, the differences of the radiative correction factors $(1+\delta)$ are about $1\% \sim 2\%$. The uncertainty of $(1+\delta)$ is estimated to be about 2.5% for a certain scheme.

Key words hadronic event, cross section, radiative correction

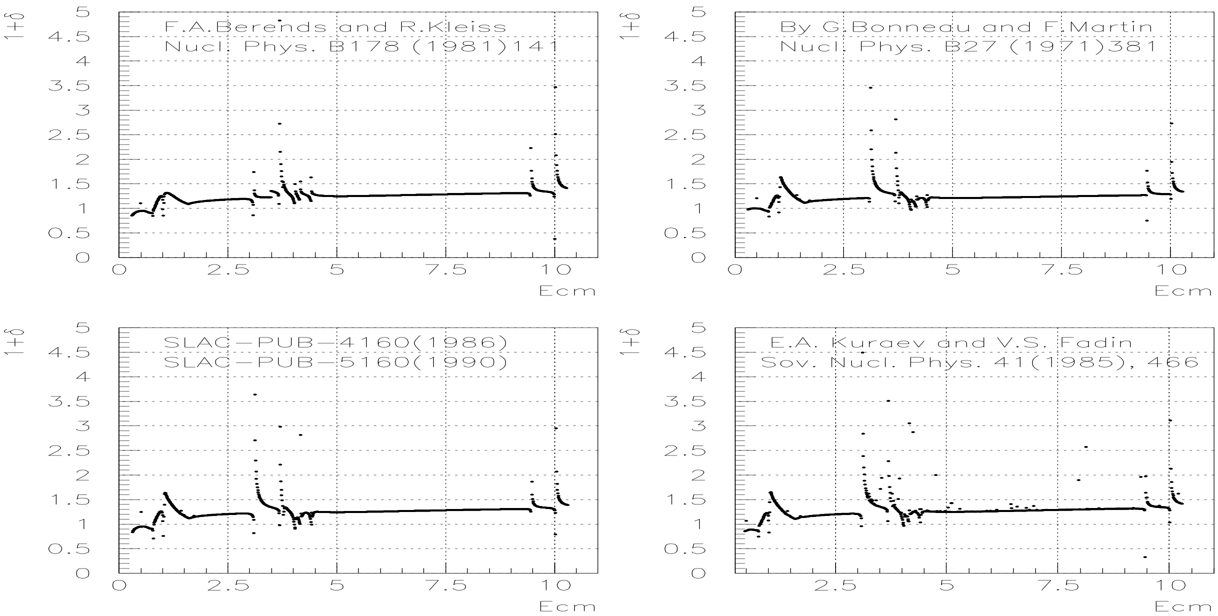

图4. 用四种方案计算的强子截面辐射修正因子